

Math. P.
037 ^{h^f}₉

Math. P. 637 hs

Wiegand

Lehrbuch

der

Mathematik.

Für den Schul- und Privatunterricht

bearbeitet

von

Dr. August Wiegand,

Oberlehrer und ersten Collegen an der Realschule zu Halle.

Analytische Geometrie.

von

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1854.

Lehrbuch
der
M a t h e m a t i k.

Für den Schul- und Privatunterricht

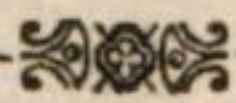
bearbeitet

von

Dr. August Wiegand,

Oberlehrer und erstem Collegen an der Realschule zu Halle.

Analytische Geometrie.



Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1854.

Math. p. Bzylhf

Die Elemente

der

analytischen Geometrie.

Ein Lehrbuch

für die oberen Klassen höherer Lehranstalten.

von

Dr. August Wiegand,

Oberlehrer und erstem Collegen an der Realschule in den Franckeschen
Stiftungen zu Halle.

Mit Figurentafeln.

Halle,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1854.

189 - BK.

Die Elemente
der
analytischen Geometrie.



Dr. August Wiegand.

Oberlehrer und erster Collegien an der Hochschule in den Französischen
Stellungen zu Halle.

Mit Figurentafeln.

Halle.

Print und Verlag von H. W. Schmidt.

1854.

Vorwort.

Mit dieser Schrift übergebe ich dem Publikum den siebenten und letzten Coursus meines Lehrbuchs der Mathematik. Das gesammte Lehrbuch umfasst demnach folgende Bände:

1. Erster Coursus der Planimetrie. 4. Auflage. 1852.
2. Zweiter Coursus der Planimetrie. 3. Auflage. 1851.
3. Ebene Trigonometrie, 2. Auflage. 1851.
4. Stereometrie und sphärische Trigonometrie. 2. Auflage. 1853.
5. Analytische Geometrie. 1854.
6. Allgemeine Arithmetik. 3. Auflage. 1852.
7. Algebraische Analysis und Differentialrechnung. 2. Auflage. 1853.

Bei allen Mängeln, die demselben anhaften mögen, dürfte man ihm doch vielleicht die Anerkennung nicht versagen, dass es beim Unterricht entstanden sei und deshalb auch stets die Bedürfnisse der Schule berücksichtigt habe. Diesem Umstande allein ist es auch wohl zuzuschreiben, dass es sich so zahlreiche Freunde erworben hat. Möchten sie ihm erhalten bleiben und möchten sie namentlich auch dem vorliegenden letzten Coursus nicht fehlen. Gar gern hätte ich ihm einen etwas umfassenderen Inhalt gegeben, doch ich durfte keinen anderen Maassstab anlegen, als den mir das Bedürfniss meiner Schule an die Hand gab. Bei einem mathematischen Schulbuche ist übrigens ein Zuviel eine grössere Sünde, als ein Zuwenig. Dankbar habe ich schliesslich noch die Namen Sohncke, Francoeur und Lübsen zu nennen, deren Schriften ich hie und da benutzt habe. Uebungsaufgaben hin-

zuzufügen, fand ich keine Veranlassung, da die deutsche Literatur hierzu hinreichendes Material bietet. Vielleicht weniger bekannt dürfte ein ganz vorzügliches englisches Werk sein, nämlich die *Problems in illustration of the principles of Plane Coordinate Geometry by William Walton. Cambridge, 1851.* auf welches ich hiermit noch angelegentlich hinweisen möchte. Gleichzeitig kann ich nicht umhin, noch auf eine ebenso ausgezeichnete hierher gehörige Schrift aufmerksam zu machen, nämlich: *The geometrical Construction of a Conic Section subject to five conditions of passing through given points and touching given straight lines, deduced from the properties of involution and anharmonic ratio, with a variety of general properties of curves of the second ordre. By the Rev. Thomas Gaskin. Cambridge. 1852.*

Halle, den 15. October 1853.

Wiegand.

I n h a l t.

	Seite
Erstes Kapitel. Coordinatensysteme. §. 1—5.	1— 3.
Zweites Kapitel. Die gerade Linie. §. 6—17.	4—13.
Drittes Kapitel. Der Kreis. §. 18—24.	13—20.
Viertes Kapitel. Die Ellipse. §. 25—29.	21—25.
Fünftes Kapitel. Die Parabel. §. 30—33.	25—30.
Sechstes Kapitel. Die Hyperbel. §. 34—36.	30—33.
Siebentes Kapitel. Methode der Tangenten. §. 37—56.	33—47.
Achtes Kapitel. Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Variablen. §. 57—60.	48—53.
Neuntes Kapitel. Discussion einiger Curven höherer Grade mit Benutzung der Elemente der Differentialrechnung. §. 61—63.	54—64.
Zehntes Kapitel. Einige transcendente Curven. §. 64—66.	64—68.

I n h a l t.

Erstes Kapitel. Coordinatensysteme. §. 1—5.	1—3.
Zweites Kapitel. Die gerade Linie. §. 6—17.	4—13.
Drittes Kapitel. Der Kreis. §. 18—24.	13—20.
Viertes Kapitel. Die Ellipse. §. 25—29.	21—25.
Fünftes Kapitel. Die Parabel. §. 30—33.	25—30.
Sechstes Kapitel. Die Hyperbel. §. 34—36.	30—33.
Siebentes Kapitel. Methode der Tangenten. §. 37—56.	33—47.
Achtes Kapitel. Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Variablen. §. 57—60.	48—53.
Neuntes Kapitel. Discussion einiger Curven höherer Grade mit Benutzung der Elemente der Differentialrechnung. §. 61—63.	54—64.
Zehntes Kapitel. Einige transcendente Curven. §. 64—66.	64—68.

Analytische Geometrie.

Erstes Kapitel.

Coordinatensysteme.

§. 1. Rechtwinkliges Coordinatensystem.

Sind AX , AY (Fig. 1.) zwei auf einander senkrecht stehende gerade Linien (Axen), so wird die Lage eines Punktes P_1 im Allgemeinen bestimmt sein, wenn dessen Abstände von den Axen, P_1Q_1 und P_1R_1 , gegeben sind. Diese Abstände führen den Namen *Coordinaten* und zwar heisst P_1Q_1 die *Abcisse* und P_1R_1 die *Ordinate* des Punktes P_1 in Bezug auf das Axensystem, von welchem entsprechend die Axe AX die *Abcissenaxe*, AY die *Ordinatenaxe*, beide *Coordinatenachsen* und der Punkt A der *Anfangspunkt* der *Coordinaten* heissen.

§. 2. Vorzeichen der Coordinaten.

Beschreibt man mit AP_1 (Fig. 1.) aus A einen Kreis und verlängert P_1Q_1 , P_1A , P_1R_1 bis zum Durchschnitte mit der Peripherie in P_2 , P_3 und P_4 , so haben die Punkte P_2 , P_3 , P_4 dieselben Abstände von den Axen, wie P_1 und findet also bei der Bestimmung eines Punktes durch seine *Coordinaten* eine Vierdeutigkeit statt. Um diese zu beseitigen bedient man sich der algebraischen Zeichen. Es mögen deshalb die von irgend welchen Punkten auf die *Ordinatenaxe* in der Richtung des längs P_1Q_1 gezeichneten Pfeils gefällten Lothe als positiv betrachtet werden. Dasselbe soll der Fall sein mit den in der Richtung des zweiten Pfeils auf die *Abcissenaxe* gefällten Lothen. Hier-nach ergeben sich die in entgegengesetzter Richtung gefällten

Lothe von selbst als negativ und wir erhalten deshalb, wenn wir die absolute Länge der Abscisse mit x , die der Ordinate mit y bezeichnen, für einen Punkt

im	I. Quadranten	die	Coordina-	ten	$+x, +y,$
„	II.	„	„	„	$-x, +y,$
„	III.	„	„	„	$-x, -y,$
„	IV.	„	„	„	$+x, -y.$

§. 3. Schiefwinkliges Axensystem.

Wir haben im Vorhergehenden die Axen als auf einander senkrecht stehend betrachtet, sie können jedoch auch jeden beliebigen Winkel (Coordinatenwinkel) einschliessen. Unter den Abständen eines zu bestimmenden Punkts sind dann nur die den Axen parallel gezogenen Geraden zu verstehen. Die Anwendung des einen oder des anderen Systems hängt von den Umständen ab.

§. 4. Polarcoordinaten.

Ein Punkt P_1 (Fig. 1.) wird auch bestimmt sein, wenn man dessen Abstand (*radius vector*) von einem festen Punkte (A) einer festen geraden Linie (AX) und ausserdem den Winkel (*amplitudo* oder Polhöhe) kennt, welche der Radius vector mit jener Axe bildet. Hier fällt alle Mehrdeutigkeit weg, wenn die *amplitudo* immer als in demselben Sinne durch Drehung, z. B. in dem Sinne I, II, III, IV, entstanden gedacht wird. Es wäre demnach *arc BP₁* die *amplitudo* von P_1 ,

arc BCP₂ „ „ „ P_2 ,

arc BCDP₃ die „ „ „ P_3 ,

arc BCDEP₄ die „ „ „ P_4 .

Bezeichnet r den Radius vector und φ die *amplitudo*, so ist

$$x = r \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Man sieht hieraus, dass Polarcoordinaten mit Leichtigkeit in rechtwinklige und umgekehrt rechtwinklige in Polarcoordinaten verwandelt werden können.

§. 5. Transformation der Coordinaten.

Es ist bisweilen auch nöthig die Coordinaten eines Systems in die eines andern Systems derselben Art zu verwandeln, und wollen wir deshalb im Folgenden die Coordinaten für ein rechtwinkliges System in die für ein zweites rechtwinkliges System verwandeln. Wir unterscheiden hier drei Fälle: 1) die Axen des neuen Systems sind denen des alten parallel;

2) beide Systeme haben denselben Anfangspunkt, die Axen des einen sind aber gegen die entsprechenden des andern unter einem bestimmten Winkel geneigt;

3) beide Systeme haben keinen gemeinschaftlichen Anfangspunkt und keine parallelen Axen.

Erster Fall. Seien AY, AX (Fig. 2.) die Axen eines Systems und $A'Y', A'X'$ die Axen eines neuen und jenen parallel. Bezeichnen ferner $a = A'B, b = A'C$ die Coordinaten des Anfangspunkts A' des neuen Systems in Bezug auf das alte und x, y die Coordinaten des Punkts P für's alte System und x', y' die Coordinaten von P für's neue System, so hat man, jenachdem A' im I., II., III. oder IV. Quadranten des alten Systems liegt:

$$\text{I) } x = x' + a \text{ und } y = y' + b,$$

$$\text{II) } x = x' - a \text{ „ } y = y' + b,$$

$$\text{III) } x = x' - a \text{ „ } y = y' - b,$$

$$\text{IV) } x = x' + a \text{ „ } y = y' - b.$$

Zweiter Fall. Macht die neue Abscissenaxe AX' mit der alten AX den Winkel α (Fig. 3.), so ist $PQ = y, AQ = x, PQ' = y', AQ' = x'$ und deshalb

$$y = PR + RQ = PR + Q'S$$

$$\text{oder } y = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha;$$

ferner ist $x = AS - QS = AS - RQ'$

$$\text{oder } x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha.$$

Wir haben somit die Transformationsformeln

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

und $y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha.$

Dritter Fall. Man lege durch den Anfangspunkt des neuen Systems parallele Axen mit denen des alten, transformire in Bezug auf die gezogenen Parallelen und dann von diesen in Bezug auf's alte System. Bezeichnen a und b die Coordinaten des neuen Anfangspunkts in Bezug auf's alte System und ξ und η die Coordinaten für die gezogenen Parallelen, so ist nach dem zweiten Falle

$$\xi = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$\eta = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

und nach dem ersten Falle

$$x = \xi + a$$

$$y = \eta + b,$$

mithin $x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha + a$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha + b.$$

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie.

§. 6. Gleichung einer Linie überhaupt.

Unter der Gleichung $y = f(x)$ einer Linie versteht man die zwischen den auf irgend ein Axensystem bezogenen Coordinaten jedes ihrer Punkte stattfindende Relation. Es geht hieraus hervor, dass nur dann von der Gleichung einer Linie die Rede sein kann, wenn deren Erzeugung einem ganz bestimmten Gesetze folgt.

Die unbestimmte Gleichung $y = f(x)$ lässt sich zur Bestimmung von Punkten der durch dieselbe ausgedrückten Linie in der Weise benutzen, dass man für eine der Coordinaten einen beliebigen Werth einsetzt und den entsprechenden der anderen sucht. Fände man z. B. für $x = a$ den Werth $y = b$, so wäre der durch die Abscisse a und die Ordinate b bestimmte Punkt ein Punkt der gesuchten Linie.

Aus §. 5. ergibt sich, dass durch Transformation der Coordinaten der Grad der Gleichung einer Linie nicht verändert wird.

§. 7. Gleichung einer geraden Linie für rechtwinklige Coordinaten.

Um zur Gleichung einer geraden Linie MN (Fig. 4.) zunächst für ein rechtwinkliges Axensystem zu gelangen, haben wir die Relation zwischen den Coordinaten irgend eines ihrer Punkte (P) zu ermitteln. Ziehen wir die Ordinate PQ , so haben wir die Relation

$$PQ:AB = QC:AC \dots (1)$$

Da die Linie eine unveränderliche Lage gegen das Axensystem hat, so haben AB , AC und der Winkel α bestimmte Werthe. Setzen wir deshalb

$$AB = b \text{ und } AC = c \text{ und } \operatorname{tg} \alpha = a,$$

$$\text{ferner } PQ = y \text{ und } AQ = x,$$

so geht die vorige Proportion über in folgende

$$y : b = x + c : c \dots (2),$$

woraus wir erhalten

$$cy = bx + bc \dots (3)$$

$$\text{oder } y = \frac{b}{c} x + b \dots (4)$$

$$\text{oder auch } y = ax + b \dots (5),$$

welches die allgemeine Gleichung einer geraden Linie für ein rechtwinkliges Axensystem ist.

Ist der Winkel α ein stumpfer, so ist $\operatorname{tg} \alpha$ negativ und also $= -a$. Schneidet die Gerade die Ordinatenaxe unterhalb, so ist b negativ.

Zusätze. a) Geht die Gerade MN durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist $b = c = 0$ und es geht Gleichung (5) über in $y = ax$,

wodurch also die Gleichung einer Geraden ausgedrückt wird, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

b) Ist MN der Abscissenaxe AX parallel, so ist $\alpha = 0$, folglich auch $a = \operatorname{tg} \alpha = 0$, und es geht Gleichung (5) über in

$$y = b,$$

wodurch also die Gleichung einer Geraden ausgedrückt wird, welche im Abstände von b der Abscissenaxe parallel ist. Ohne Weiteres ergibt sich, dass

$$y = 0$$

die Gleichung der Abscissenaxe selbst darstellt.

Da es ganz gleichgültig ist, welche der Axen man als Abscissen- oder Ordinatenaxe ansieht, so ersieht man sofort, dass die Gleichung einer Geraden ist, die im Abstände von c der Ordinatenaxe parallel geht. Durch das Vorzeichen von b und c wird natürlich bestimmt, auf welcher Seite der Axen die betreffenden Geraden liegen. In der That ergibt sich für unsere Lage der Linie MN gegen das Axensystem

Dividiren wir nämlich Gleichung (3) durch b , so erhalten wir

$$\frac{c}{b} y = x + c$$

oder $\cot \alpha \cdot y = x + c \dots (6)$.

Ist nun MN der Ordinatenaxe parallel, so ist $\alpha = 90^\circ$, mithin $\cot \alpha = 0$, es geht demnach Gleichung (6) über in

$$0 = x + c$$

$$\text{oder } x = -c.$$

c) Aus dem Bisherigen ergibt sich, dass alle Linien, deren Gleichungen sich nur in dem constanten Gliede (b) unterscheiden, einander parallel sind.

d) Dividirt man Gleichung (3) durch bc , so geht sie über in

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{c} + 1,$$

oder auch $\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1 \dots (7)$,

wo b und c mit den zugehörigen Vorzeichen zu behaften sind. Die Gleichung (7) lässt sich ebenfalls als allgemeine Gleichung einer geraden Linie betrachten und werden wir auch von ihr Gebrauch zu machen im Folgenden mehrfache Gelegenheit finden.

§. 8. Gleichung einer geraden Linie für schiefwinklige
Coordinationen.

Ist (Fig. 5.) der Coordinatenwinkel γ ein schiefer, so erhalten wir bei entsprechender Konstruktion, wie in Fig. 4., wieder

$$y = \frac{b}{c} x + b \quad (\text{vergl. Gl. 4. §. 7.})$$

Hier ist aber $\frac{b}{c}$ nicht $= \operatorname{tg} \alpha$, sondern (Eb. Trigon. §. 65.)

$$= \frac{\sin \alpha}{\sin (\gamma - \alpha)},$$

wodurch die letzte Gleichung die Form

$$y = \frac{\sin \alpha}{\sin (\gamma - \alpha)} \cdot x + b$$

annimmt, die für $\gamma = 90^\circ$ sofort wieder in

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x + b.$$

oder $y = ax + b$ übergeht.

Die Gleichung $\frac{y}{b} + \frac{x}{c} = 1$

behält für schiefwinklige Coordinationen dieselbe Form (wie für rechtwinklige, da die Gleichung (3) in §. 7. für beide Systeme gilt.

§. 9. Die Gleichung einer Geraden zu finden, welche durch
zwei gegebene Punkte geht.

Sind x', y' und x'', y'' die Coordinaten der gegebenen Punkte, so müssen dieselben der allgemeinen Gleichung der gesuchten Geraden

$$y = ax + b \dots (1)$$

genügen und folglich auch die Gleichungen

$$y' = ax' + b \dots (2),$$

$$y'' = ax'' + b \dots (3)$$

richtig sein. Aus diesen drei Gleichungen lassen sich nun a und b eliminiren. Man erhält nämlich aus (1) und (2)

$$y - y' = a(x - x') \dots (4),$$

aus (2) und (3) $y' - y'' = a(x' - x'')$

$$\text{oder } a = \frac{y' - y''}{x' - x''} \dots (5).$$

Setzt man (5) in (4) ein, so erhält man

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x')$$

als Gleichung der gesuchten Geraden.

§. 10. Den Winkel zu bestimmen, welchen zwei gegebene gerade Linien einschliessen.

Sind (Fig. 6.)

$$\text{I) } y = ax + b$$

$$\text{II) } y' = a'x + b',$$

die Gleichungen der Geraden I. und II, und φ der gesuchte Winkel, so ist $\varphi = \alpha - \alpha'$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \operatorname{tg} (\alpha - \alpha') \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha'}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \alpha'} \quad (\text{Eb. Trig. §. 47.}) \end{aligned}$$

$$\text{oder } \operatorname{tg} \varphi = \frac{a - a'}{1 + aa'} \dots (1).$$

Zusätze. a) Ist der Zähler im Ausdruck (1) $= 0$, oder $a = a'$, so ist $\operatorname{tg} \varphi = 0$ und also auch $\varphi = 0$, d. h. die beiden Geraden sind einander parallel.

b) Ist der Nenner von (1)

$$1 + aa' = 0 \dots (2)$$

$$\text{oder } a' = -\frac{1}{a} \dots (3),$$

so ist $\operatorname{tg} \varphi = \infty$,

mithin $\varphi = 90^\circ$, d. h.

die Linien stehen senkrecht aufeinander. Es geht hieraus hervor, dass die Gleichung

$$1 + aa' = 0$$

$$\text{oder auch } a' = -\frac{1}{a}$$

die Bedingungsgleichung für das Senkrechtstehen zweier Linien aufeinander ist.

§. 11. Es ist eine gerade Linie und ein Punkt ausser ihr gegeben; es soll durch den Punkt eine zweite Gerade gezogen werden, welche mit der gegebenen einen vorgeschriebenen Winkel bildet.

Sei (x', y') der gegebene Punkt, $y = ax + b$ die gegebene Gerade und A die Tangente des vorgeschriebenen Win-

kels, so ist, wenn a' die Tangente des Winkels bezeichnet, welche die gesuchte Gerade mit der Abscissenaxe bildet,

$$a' = \frac{a - A}{1 + aA} \dots (1).$$

Bezeichne nun $y = a'x + b'$ die Gleichung der gesuchten Geraden, so muss, weil letztere durch (x', y') gehen soll, auch

$$y' = a'x' + b'$$

sein; folglich erhalten wir durch Subtraction

$$y - y' = a'(x - x') \dots (2).$$

Setzen wir (1) in (2) ein, so erhalten wir

$$y - y' = \frac{a - A}{1 + aA} (x - x') \dots (3).$$

§. 12. *Es ist eine gerade Linie und ein Punkt ausser ihr gegeben, es soll durch den Punkt eine zweite Gerade gezogen werden, welche der gegebenen parallel ist.*

Sollen die Linien parallel sein, so ist $A = 0$ und es geht die Gleichung (3) §. 11. über in

$$y - y' = a(x - x'),$$

welches die Gleichung der gesuchten Parallele ist. Folgt auch aus Gleichung (2), wenn man $a' = a$ setzt.

§. 13. *Von einem gegebenen Punkte ausserhalb einer Geraden auf diese ein Loth zu fällen.*

Da nach §. 10

$$a' = -\frac{1}{a}$$

ist, so geht Gleichung (2) §. 11. über in

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Lässt sich übrigens ebenfalls aus Gleichung (3) §. 11. herleiten. Schreibt man dieselbe nämlich unter der Form

$$y - y' = \frac{\frac{a}{A} - 1}{\frac{1}{A} + a}(x - x')$$

und setzt $A = \infty$, so erhält man

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

§. 14. Den Abstand zweier gegebenen Punkte zu finden.

Soll der Abstand d der Punkte P und Q (Fig. 7.) gefunden werden, so hat man, wenn man $QR \parallel AX$ zieht,

$$PQ^2 = QR^2 + PR^2$$

$$\text{oder } d^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2,$$

$$\text{mithin } d = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2}.$$

Zusätze. a) Liegt einer der Punkte, z. B. Q , im Anfangspunkte der Coordinaten, so ist

$$x'' = y'' = 0 \text{ und folglich}$$

$$d = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$

b) Ist die Gleichung der durch P und Q gehenden Geraden $y = ax + b$ gegeben, so ist $\operatorname{tg} PQR = a$ und folglich $PR = QR \cdot a$, mithin

$$d = (x' - x'')\sqrt{1 + a^2},$$

wo dem Wurzel Ausdruck dasjenige Zeichen zu geben ist, durch welches d positiv gemacht wird.

§. 15. Den Durchschnittspunkt zweier gegebenen Geraden zu finden.

$$\text{Sind } y = ax + b$$

$$\text{und } y' = a'x + b'$$

die Gleichungen der gegebenen Geraden, so haben wir, wenn ξ und η die Coordinaten des Durchschnittspunkts bezeichnen,

$$\eta = a\xi + b$$

$$\eta = a'\xi + b',$$

$$\text{woraus sich } \xi = -\frac{b - b'}{a - a'}$$

$$\text{und } \eta = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$$

bestimmen.

Ganz allgemein findet man die Coordinaten des Durchschnittspunkts zweier beliebigen Linien (Curven), wenn man in den Gleichungen der letzteren x und y als Unbekannte ansieht

und aus jenen bestimmt. Die Anzahl der erhaltenen Werthe bestimmt die Anzahl der vorhandenen Durchschnittspunkte.

§. 16. Den Abstand eines Punkts von einer Geraden zu finden.

Ist $y = ax + b$ die Gleichung der gegebenen Geraden und (x', y') der gegebene Punkt, so sind zunächst die Coordinaten des Fusspunkts des gesuchten Lothes nach §. 15. und der Abstand dieses Punkts vom gegebenen nach §. 14. zu bestimmen.

Bezeichnen wir die Coordinaten des gesuchten Fusspunkts mit ξ und η , so ist §. 14.

$$d = \sqrt{(\xi - x')^2 + (\eta - y')^2} \dots (1)$$

wir haben deshalb nicht nöthig ξ und η selbst, sondern nur die Differenzen $(\xi - x')$ und $(\eta - y')$ zu bestimmen. Zu dem Ende schreiben wir die Gleichung der gegebenen Geraden unter der Form

$$y - y' = a(x - x') + ax' + b - y' \dots (2)$$

und verbinden damit die Gleichung des Lothes (§. 13.)

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x') \dots (3).$$

Setzen wir in die beiden letzten Gleichungen für x und y bezüglich ξ und η ein, so erhalten wir

$$\xi - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2} \dots (4)$$

$$\text{und } \eta - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2} \dots (5).$$

Durch Einsetzung von (4) und (5) in (1) erhalten wir

$$d = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}} \dots (6),$$

was der gesuchte Abstand ist. In Betreff des Zeichens vom Wurzelausdruck gilt das §. 14. Zus. b) Gesagte.

Zusatz. Ist der gegebene Punkt der Anfangspunkt der Coordinaten, so ist $x' = y' = 0$ und folglich nach absoluter Grösse

$$d = \frac{b}{\sqrt{1 + a^2}} \dots (7).$$

§. 17. Aufgaben.

1) Sind

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$$

die Gleichungen zweier Geraden (vergl. §. 8.), so stellt deren Differenz

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a'}\right)x + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right)y = 0$$

die Gleichung der Geraden dar, welche durch den Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden und den Anfangspunkt der Coordinaten geht.

2) Sind die Gleichungen zweier Geraden wie vorher gegeben, so stellt deren Summe

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right)x + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b'}\right)y = 0$$

die Gleichung der Geraden dar, welche durch den Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden und durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen des Vierecks geht, welches durch die beiden Geraden und die Coordinatenachsen gebildet wird.

(Vergl. bei 1. u. 2. meine Uebersetzung der Schrift: Sätze aus der Coordinatengeometrie von Rutherford und Fenwick.)

3) Es sind die Gleichungen der Schenkel eines Winkels gegeben, es soll die Gleichung der Winkelhalbirenden gefunden werden.

4) Durch einen gegebenen Punkt soll eine Gerade gezogen werden, welche zwei parallele Gerade so schneidet, dass das zwischen letzteren liegende Stück eine vorgeschriebene Grösse habe.

5) In dem einen Schenkel eines Winkels den Punkt zu bestimmen, welcher vom andern Schenkel einen gegebenen Abstand hat.

6) Den Inhalt eines Dreiecks aus den Coordinaten seiner Winkelspitzen zu bestimmen.

7) Es sind n Punkte gegeben, es soll eine Gerade so gezogen werden, dass wenn von jenen Punkten Lothe auf dieselbe gefällt werden, die auf der einen Seite der Geraden befindlichen denen auf der andern gleich sind.

8) Die Gleichungen der Seiten und Diagonalen eines regulären Fünfecks zu bestimmen, dessen eine Seite auf der Abscissenaxe liegt und den Anfangspunkt der Coordinaten in einem ihrer Endpunkte hat.

9) Der Coordinatenwinkel eines Axensystems sei 60° , es soll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, welche der Geraden $x + y = 3a$ parallel ist und von ihr den Abstand $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$ hat.

10) Es ist zu zeigen, dass die Geraden, deren Gleichungen sind

$$y = 2x + 3, \quad y = 3x + 4, \quad y = 4x + 5,$$

einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben.

11) Es sind zwei Linien

$$y = x + 1 \quad \text{und} \quad y = 2x + 2$$

gegeben, es soll in der Gleichung

$$y = ax + 3$$

der Werth von a so bestimmt werden, dass die hierdurch ausgedrückte Linie durch den Durchschnittspunkt der beiden vorigen geht.

Drittes Kapitel.

Der Kreis.

§. 18. Gleichungen des Kreises.

a) Nimmt man den Mittelpunkt (A Fig. 8.) des Kreises als Anfangspunkt der Coordinaten, so hat man, wenn r der Radius ist,

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots (1),$$

welches die Gleichung des Kreises für seinen Mittelpunkt ist, da sie eine für jeden Punkt der Peripherie geltende Relation ausdrückt.

b) Wird der Anfangspunkt der Coordinaten in den Endpunkt B eines Durchmessers verlegt, so ist $BQ = x$, $PQ = y$, folglich

$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{oder} \quad x^2 + y^2 = 2rx \dots (2).$$

c) Verlegt man endlich den Anfangspunkt in irgend einen Punkt (A') der Ebene des Kreises und sind a, b die Coordinaten des Kreismittelpunkts, so ergibt sich ohne Weiteres

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \dots (3)$$

als Gleichung des Kreises.

§. 19. Folgerungen.

Aus Gleichung (1) des vorigen §. ergibt sich

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$\text{und } x = \pm \sqrt{r^2 - y^2};$$

hieraus geht hervor, dass zu jedem Werthe von x zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe von y und ebenso zu jedem Werthe von y zwei solche Werthe von x gehören. Die Curve liegt also symmetrisch gegen die Axen.

Für $x=0$ erhält man $y = \pm r$ und für $y=0$ erhält man $x = \pm r$. Der Kreis schneidet demnach die Axen im Abstände des Radius vom Anfangspunkte.

§. 20. Der Winkel im Halbkreise ist ein Rechter.

Da B (Fig. 9.) die Coordinaten $+r, 0$ und C die Coordinaten $-r, 0$ hat, so haben die Gleichungen der durch B und C bezüglich gezogenen Geraden die Form

$$y = a(x - r)$$

$$\text{und } y = a'(x + r).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts beider Geraden mit ξ und η , so bestimmen sich diese aus den Gleichungen

$$\eta = a(\xi - r),$$

$$\eta = a'(\xi + r),$$

und man erhält

$$\xi = \frac{a + a'}{a - a'} r,$$

$$\text{und } \eta = \frac{2aa'}{a - a'} r.$$

Soll der Durchschnittspunkt D auf der Peripherie des Kreises liegen, so müssen seine Coordinaten der Gleichung des Kreises genügen. Wir erhalten demnach die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{a + a'}{a - a'} \right)^2 r^2 + \frac{4a^2 a'^2}{(a - a')^2} r^2 = r^2,$$

welche sich auf $aa'(1 + aa') = 0$

reducirt. Dieser Gleichung wird genügt, wenn a oder a' oder $1 + aa' = 0$ ist. Ist $a = 0$, so fällt BD auf den Durchmesser, ist $a' = 0$, so fällt CD auf den Durchmesser; in beiden Fällen wird also der Bedingung genügt, dass beide Linien sich auf der Peripherie schneiden sollen. Die Gleichung $1 + aa' = 0$ dagegen ist (§. 10.) die Bedingungsgleichung für das Senkrechtstehen zweier Geraden aufeinander und es geht demnach hieraus hervor, dass der Bedingung, die Linien sollen sich auf der Peripherie schneiden, auch genügt wird, wenn dieselben aufeinander senkrecht stehen. Es ist also hierdurch der analytische Beweis für den Satz geliefert, dass der Winkel im Halbkreise ein Rechter ist.

§. 21. *Der Kreis in Verbindung mit der geraden Linie.*

Sind $x^2 + y^2 = r^2$

und $y = ax + b$

bezüglich die Gleichungen des Kreises und der geraden Linien, so findet man die Coordinaten (ξ, η) der Durchschnittspunkte durch die Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

$$\eta = a\xi + b.$$

Bestimmen wir ξ hieraus, so haben wir

$$\xi^2 + (a\xi + b)^2 = r^2$$

und hieraus

$$\xi = -\frac{ab}{1+a^2} \pm \sqrt{\frac{(1+a^2)r^2 - b^2}{(1+a^2)^2}} \dots (1)$$

$$\text{oder } \xi = -\frac{ab}{1+a^2} \pm \sqrt{\frac{1}{1+a^2} \cdot \left(r^2 - \frac{b^2}{1+a^2}\right)} \dots (2)$$

Nach §. 16. (7) ist $d = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}}$ der Abstand der Geraden, vom Anfangspunkte. Setzen wir d unter der Wurzel ein, so erhalten wir

$$\xi = -\frac{ab}{1+a^2} \pm \sqrt{\frac{r^2 - d^2}{1+a^2}} \dots (3).$$

Aus Gleichung (3) ergibt sich, dass wenn $r > d$ ist, für ξ zwei Werthe erhalten werden, welche offenbar zwei

Durchschnittspunkten des Kreises und der geraden Linie entsprechen. Ist $r = d$, so wird der Wurzel Ausdruck Null und der einzige Werth von ξ ist

$$\xi = -\frac{ab}{1+a^2},$$

Die Linie wird in diesem Falle zur Tangente. Ist endlich $r < d$, so wird der Ausdruck unter der Wurzel negativ, die Wurzel also imaginär. Es geht hieraus hervor, dass die Linie den Kreis in diesem Falle gar nicht schneidet.

§. 22. Gleichung der Tangente an den Kreis.

Sind x', y' (Fig. 10.) die Coordinaten eines Punktes M in der Peripherie eines Kreises, so ist

$$y - y' = a(x - x') \dots (1)$$

die Gleichung einer durch M gehenden Geraden. Wenn dieselbe den Kreis berührt, so steht sie auf dem Radius CM senkrecht, folglich ist die Gleichung des an den Berührungspunkt gezogenen Radius nach §. 10.

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Nun ist $\frac{y'}{x'}$ gleich der Tangente des Winkels, welchen der Radius mit der Abscissenaxe macht, folglich haben wir

$$-\frac{1}{a} = \frac{y'}{x'} \dots (2).$$

Setzen wir (2) in (1) ein, so erhalten wir

$$y - y' = -\frac{x'}{y'}(x - x')$$

$$\text{oder } yy' + xx' = y'^2 + x'^2$$

$$\text{oder } yy' + xx' = r^2 \dots (3),$$

welches die gesuchte Gleichung der Tangente ist.

Erklärung. Die im Berührungspunkte der an einen Punkt einer Curve gezogenen Tangente errichtete Senkrechte heisst Normale, ihre Projection auf die Abscissenaxe die Subnormale, so wie die Projection der Tangente Subtangente heisst.

Bei unserem Kreise ist der Radius CM die Normale, $CP = x'$ die Subnormale und PT die Subtangente. Die letztere ist ebenfalls leicht zu bestimmen. Es ist nämlich

$$PT = \frac{y'}{\operatorname{tg} MTP} \\ = \frac{y'}{-a} = \frac{y'^2}{x'} \text{ nach (2)} \\ = \frac{r^2 - x'^2}{x'}.$$

§. 23. Von einem Punkte ausserhalb eines Kreises an diesen eine Tangente zu ziehen.

Sind a, b die Coordinaten des gegebenen Punkts, so werden die Coordinaten ξ, η des Berührungspunkts gefunden durch die Gleichungen

$$b\eta + a\xi = r^2 \dots (1)$$

$$\eta^2 + \xi^2 = r^2 \dots (2),$$

woraus man erhält

$$\xi = \frac{r^2 a \pm r b \sqrt{a^2 + b^2 - r^2}}{a^2 + b^2}.$$

Es geht hieraus hervor, dass, da der Voraussetzung gemäss der gegebene Punkt ausserhalb des Kreises liegt und also

$$\sqrt{a^2 + b^2} > r$$

ist, sich stets zwei Tangenten an den Kreis ziehen lassen.

Um das geometrische Verfahren zur Auffindung der Berührungspunkte zu rechtfertigen, subtrahiren wir die Gleichung (1) von (2), wodurch wir erhalten

$$\eta^2 - b\eta + \xi^2 - a\xi = 0,$$

oder wenn wir die Quadrate vervollständigen

$$\left(\eta - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \dots (3).$$

Betrachten wir jetzt ξ und η als Variable, so stellt die Gleichung (3) die Gleichung eines Kreises dar, dessen Centrum die Coordinaten $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ hat, mithin (Fig. 11.) in M sich befindet, und dessen Radius

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

d. h. gleich dem halben Abstände des Punkts P vom Centrum des gegebenen Kreises oder $= MA$ ist. Da ξ und η der Gleichung (3) genügen, so müssen die Berührungspunkte auf dem durch diese Gleichung ausgedrückten Kreise ebenfalls liegen und also die Durchschnittspunkte beider Kreise sein; woraus sich die geometrische Lösung der Aufgabe ergibt.

§. 24. *Untersuchung der Lage zweier Kreise gegen einander.*

Sind A und A' die Mittelpunkte zweier Kreise, r und r' ihre Radien, wo $r \geq r'$ angenommen sein möge; betrachtet man ferner die Centrale AA' als Abscissenaxe für beide Kreise und die in A darauf Senkrechte als Ordinatenaxe, so ist, wenn $AA' = a$ gesetzt wird,

$x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung des Kreises A

$(x - a)^2 + y^2 = r'^2$ die Gleichung des Kreises A' .

Bezeichnen ξ und η die Coordinaten der Durchschnittspunkte, so werden diese durch die Gleichungen

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

$$\text{und } (\xi - a)^2 + \eta^2 = r'^2$$

bestimmt. Man erhält hieraus sofort

$$1) \xi = \frac{a^2 + r^2 - r'^2}{2a}$$

$$\text{und } \eta = \frac{\pm \sqrt{4a^2 r^2 - (a^2 + r^2 - r'^2)^2}}{2a}$$

$$= \frac{\pm \sqrt{(2ar + a^2 + r^2 - r'^2)(2ar - a^2 - r^2 + r'^2)}}{2a}$$

oder endlich

$$2) \eta = \frac{\pm \sqrt{(a + r + r')(a + r - r')(r + r' - a)(a - (r - r'))^*}}{2a}$$

Die blosse Ansicht der Werthe unter 1) und 2) ergibt den Satz:

a) *Wenn sich zwei Kreise schneiden, so steht die gemeinschaftliche Sehne auf der Centrale senkrecht.*

*) Die Zerlegung des Ausdrucks unter der Wurzel in die vier Factoren bewirkt man leicht dadurch, dass man sowohl $2ar + a^2 + r^2 - r'^2$, als auch $2ar - a^2 - r^2 + r'^2 = 0$ setzt und a bestimmt. (Vergleiche mein Lehrbuch der Algebr. Analysis §. 67.).

Der Bestimmung, dass $r \geq r'$ sein solle, gemäss, sind die beiden ersten Factoren unter der Wurzel in 2) stets positiv und es hängt deshalb die Reellität der Wurzel lediglich von den beiden letzten Factoren ab und zwar davon, ob beide gleiche Vorzeichen haben oder nicht. Sind die Vorzeichen der Factoren

$$r + r' - a \text{ und } a - (r - r')$$

gleich, so müssen sie offenbar positiv sein, weil nicht zugleich

$$\begin{aligned} a &> r + r' \\ \text{und } a &< r - r' \end{aligned}$$

sein kann. In diesem Falle nun, wo $r + r' > a > r - r'$ ist, hat η zwei reelle Werthe, woraus sich der Satz ergibt:

b) *Ist die Centrale zweier Kreise kleiner als die Summe ihrer Radien, aber grösser als die Differenz derselben, so schneiden die Kreise einander in zwei Punkten.*

Ist einer der in Rede stehenden Factoren Null, also

$$a = r + r' \text{ oder } a = r - r',$$

so verschwindet der ganze Wurzelwerth und wir erhalten

$$y = 0$$

und hieraus den Satz:

c) *Ist die Centrale zweier Kreise gleich der Summe oder der Differenz ihrer Radien, so haben die Kreise nur einen Punkt mit einander gemein, d. h. sie berühren einander.*

Haben die beiden Factoren verschiedene Vorzeichen, d. h.

$$\text{ist } a > r + r' \text{ und } r - r'$$

$$\text{oder } a < r + r' \text{ und } r - r',$$

so wird η imaginär und wir erhalten, da $a > r + r'$ und $a < r - r'$ alle übrigen Bedingungen in sich schliessen, den Satz:

d) *Ist die Centrale zweier Kreise grösser als die Summe ihrer Radien oder kleiner als die Differenz derselben, so haben die Kreise keinen Punkt gemein, d. h. sie schneiden einander gar nicht.*

Anmerkung. Wird die Centrale $a = 0$ gesetzt, so ist $\eta = \pm \sqrt{-\infty}$; also wieder imaginär. Die Kreise sind con-

centrisch und schneiden einander nicht. Ist jedoch gleichzeitig $r=r'$, so nehmen ξ und η die vieldeutige Form $\frac{0}{0}$ an. In der That haben in diesem Falle die Kreise unendlich viel Punkte mit einander gemein, da sie ganz zusammenfallen.

Viertes Kapitel.

Die Ellipse.

§. 25. Charakteristische Eigenschaft der Curve.

Die Ellipse ist eine Curve von solcher Beschaffenheit, dass die Summe der Abstände jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten constant ist. Die ersten Punkte heissen Brennpunkte (*foci*), die von diesen an irgend einen Punkt der Curve gezogenen Geraden dagegen Leitstrahlen (*radii vectores*).

Aus der angeführten Eigenschaft der Ellipse ergibt sich folgende Entstehungsart derselben: Man befestige in zwei Punkten einer geraden Linie die Enden eines Fadens, welcher so lang ist, als die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen werden soll; spanne hierauf den Faden mit einer Bleifeder an und führe die letztere bei fortwährender Spannung des Fadens von der geraden Linie aus auf dem Papiere fort, bis sie auf der anderen Seite wieder auf die Gerade kommt. Ganz ebenso verfähre man auf der anderen Seite der Geraden.

§. 26. Gleichung der Ellipse.

Es seien (Fig. 12.) F und F' die Brennpunkte, A die Mitte ihres Abstandes, P ein Punkt der Curve und die constante Summe seiner Abstände von den Leitstrahlen $z+z'=2a$. Wir betrachten die durch die Brennpunkte gezogene Gerade als Abscissenaxe, die durch A gelegte Senkrechte als Ordinatenaxe, so ist $PQ=y$ die Ordinate und $AQ=x$ die Abscisse des Punkts P . Setzen wir ferner $FF'=2e$, so ist $FQ=e-x$, $F'Q=e+x$, folglich haben wir

$$z = \sqrt{y^2 + (e - x)^2}$$

$$\text{und } z' = \sqrt{y^2 + (e + x)^2},$$

$$\text{mithin } z + z' = 2a = \sqrt{y^2 + (e - x)^2} + \sqrt{y^2 + (e + x)^2}.$$

Um dieser Gleichung eine bequemere Form zu geben, schreiben wir

$$2a - \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = \sqrt{y^2 + (e + x)^2}$$

und quadriren, so erhalten wir

$$4a^2 + y^2 + e^2 + x^2 - 2ex - 4a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} = y^2 + e^2 + x^2 + 2ex$$

$$\text{oder } a^2 - ex = a\sqrt{y^2 + (e - x)^2}.$$

Erheben wir beide Seiten nochmals auf's Quadrat, so erhalten wir

$$a^4 + e^2x^2 - 2a^2ex = a^2y^2 + a^2e^2 + a^2x^2 - 2a^2ex$$

$$\text{oder } a^2(a^2 - e^2) = a^2y^2 + (a^2 - e^2)x^2.$$

Da a und e constant sind, so ist es auch $a^2 - e^2$. Setzen wir deshalb diese Differenz $= b^2$, so nimmt die Gleichung unserer Curve die Gestalt an:

$$\mathbf{a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \dots (A).}$$

§. 27. Discussion der Gleichung der Ellipse.

a) Aus der Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \dots (B)$$

Aus dem doppelten Zeichen ersieht man, dass zu jeder Abscisse zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe von y gehören, woraus hervorgeht, dass die Curve zu beiden Seiten der Abscissenaxe symmetrisch liegt. Aus der ebenso leicht sich ergebenden Gleichung

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2} \dots (C)$$

ersieht man, dass ganz dasselbe in Bezug auf die Ordinatenaxe gilt.

b) Aus der Gleichung (B) ersieht man, dass y nur für $x < \pm a$ reelle Werthe hat, woraus hervorgeht, dass die Curve ganz zwischen zwei der Ordinatenaxe parallelen Geraden liegt, die vom Anfangspunkte der Coordinaten bezüglich die Abstände

$\pm a$ haben. Da die Gleichung der Ellipse für $x = \pm a$ in $y = 0$ übergeht, so geht daraus hervor, dass die beiden von der Ordinatenaxe am entferntesten liegenden Punkte die Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissenaxe sind. Man nennt den Abstand (MM' Fig. 12.) dieser Punkte die Hauptaxe oder grosse Axe der Ellipse. Da, wie wir gesehen, $MM' = 2a$ ist, so folgt hieraus, dass die Summe zweier zusammengehörigen Leitstrahlen gleich der Hauptaxe ist. Es ergibt sich dies schon aus der graphischen Darstellung in §. 25. Eine Verzeichnung der Curve durch Punkte ergibt sich ebenfalls hieraus. Wenn man nämlich die Hauptaxe in zwei beliebige Stücke und mit dem einen als Radius aus dem einen Brennpunkte, mit dem anderen Stücke aus dem anderen einen Kreis beschreibt, so sind die Durchschnittspunkte zwei Punkte der Ellipse.

c) Aus der Gleichung (C) ersieht man, dass x nur für $y < \pm b$ reelle Werthe hat, woraus hervorgeht, dass die Curve zu beiden Seiten der Abscissenaxe von zwei dieser parallelen Geraden eingeschlossen wird, welche die Abstände $\pm b$ von derselben haben. Da die Gleichung der Curve für $y = \pm b$ in $x = 0$ übergeht, so ersieht man, dass die beiden von der Abscissenaxe am entferntesten liegenden Punkte der Curve die Durchschnittspunkte derselben mit der Ordinatenaxe sind. Man nennt den Abstand dieser Punkte $NN' = 2b$ (Fig. 12.) die Nebenaxe oder kleine Axe der Ellipse. Wir setzten früher $a^2 - e^2 = b^2$; jetzt finden wir diese Relation in der Figur wieder, da $FN = F'N = a$, $AF = e$, $AN = b$ und $AN^2 = FN^2 - AF^2$ (Fig. 13.) ist. Sind die beiden Axen gegeben, so findet man die Brennpunkte dadurch, dass man von einem Endpunkte der kleinen Axe aus mit der grossen Halbaxe einen Kreis beschreibt. Die Durchschnittspunkte desselben mit der grossen Axe sind die Brennpunkte. Die Grösse $2e$ oder der Abstand der Brennpunkte wird die Excentricität genannt.

d) Aus dem Bisherigen geht noch hervor, dass die Ellipse eine geschlossene Curve ist. Die Punkte M, M', N, N' heissen die Scheitel, A der Mittelpunkt derselben. Rücken die beiden Brennpunkte zusammen, d. h. ist $e = 0$,

so wird $b=a$ und die Gleichung der Ellipse geht über in die Gleichung des Kreises

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Die Ellipse wird von dem über ihrer Hauptaxe beschriebenen Kreise ganz umschlossen, während der über der kleinen Axe beschriebene von ihr eingeschlossen wird. Suchen wir die zu einer und derselben Abscisse gehörigen Ordinaten in der Ellipse sowohl als in dem vorgenannten Kreise, so haben wir, wenn wir dieselben bezüglich mit y und Y bezeichnen

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\text{und } Y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\text{folglich } \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$

Das Verhältniss dieser Ordinaten ist demnach constant. Hierauf gründet sich noch ein bequemes Verfahren, bei gegebenen Axen beliebig viel Punkte der Ellipse zu bestimmen. Man beschreibe nämlich (Fig. 14.) über der grossen Axe sowohl, als über der kleinen einen Kreis, ziehe den Radius AP , $PQ \perp MM'$ und $RS \parallel MM'$. Der Punkt S ist ein Punkt der Ellipse.

e) Sucht man die zu einem der Brennpunkte (F) gehörige Ordinate, so hat man in der Gleichung der Ellipse $x^2 = e^2 = a^2 - b^2$ zu setzen und erhält demnach

$$a^2 y^2 + b^2 (a^2 - b^2) = a^2 b^2$$

$$\text{und hieraus } y = \pm \frac{b^2}{a}.$$

Der doppelte Werth dieser Ordinate (PP' Fig. 13.) heisst der Parameter der Ellipse. Bezeichnen wir ihn mit p , so ist

$$p = \frac{2b^2}{a} = \frac{4b^2}{2a} = \frac{(2b)^2}{2a}$$

$$\text{oder } 2a : 2b = 2b : p,$$

d. h. der Parameter einer Ellipse ist die dritte Proportionale zur grossen und kleinen Axe.

§. 28. Gleichung der Ellipse für die Scheitel als Anfangspunkt der Coordinaten.

Verlegen wir den Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Scheitel M (Fig. 14.), behalten im Uebrigen aber die

Richtung der Axen bei, so bleiben die Ordinaten dieselben, während die Abscissen für's alte System gleich den um die grosse Halbaxe verminderten Abscissen des neuen sind. Wir haben deshalb in der Gleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

nur $x - a$ statt x einzusetzen, wodurch wir zu der Gleichung

$$a^2y^2 = b^2(2ax - x^2) \dots (D)$$

gelangen. Geben wir dieser Gleichung die Form

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{2b^2}{a} \cdot \frac{x^2}{2a}$$

und setzen $\frac{2b^2}{a} = p$ ein, so erhalten wir als Gleichung der Ellipse für Hauptaxe und Parameter

$$y^2 = px - p \cdot \frac{x^2}{2a} \dots (E).$$

Die rechte Seite der Gleichung nähert sich offenbar dem Werthe px um so mehr, je grösser die Hauptaxe genommen wird, und geht in px über für $a = \infty$ d. h. wenn der zweite Scheitel der Ellipse und folglich auch der zweite Brennpunkt in unendliche Ferne gerückt. Die Curve verliert natürlich dadurch ihren ursprünglichen Charakter, erscheint aber gleichwohl als ein specieller Fall der Ellipse. Das folgende Kapitel wird weiter davon handeln.

§. 29. Polargleichung der Ellipse.

Wir wählen den Brennpunkt F (Fig. 15.) als Pol, den Winkel $MFG = \varphi$ als Amplitude im Sinne MGM' durch Drehung entstanden, und setzen $FG = r$ und $F'G = r'$, so haben wir (Trigon. §. 70.)

$$r'^2 = 4e^2 + r^2 + 4er \cos \varphi,$$

$$\text{oder weil } r' = 2a - r$$

$$a^2 - ar = er + er \cos \varphi,$$

$$a^2 - e^2 = r(a + e \cos \varphi)$$

und hieraus

$$r = \frac{a^2 - e^2}{a + e \cos \varphi} \dots (F).$$

Wir können dieser Gleichung auch die Form geben

$$r = \frac{a \left[1 - \left(\frac{e}{a} \right)^2 \right]}{1 + \frac{e}{a} \cos \varphi}$$

und wenn wir das Verhältniss der Excentricität zur Hauptaxe

$$\frac{e}{a} = \varepsilon \text{ setzen,}$$

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \dots (G).$$

Dies ist die Form der Gleichung, wie sie in der Astronomie angewendet wird.

$$\text{Da } 1 - \left(\frac{e}{a} \right)^2 = \frac{a^2 - e^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} p$$

ist, so können wir die Gleichung (G) auch schreiben

$$r = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \dots (H).$$

Fünftes Kapitel.

Die Parabel.

§. 30. Charakteristische Eigenschaft der Parabel.

Mit dem Namen Parabel bezeichnet man eine Curve von der Beschaffenheit, dass jeder ihrer Punkte von einem festen Punkte, dem Brennpunkte, und einer ihre Lage bestimmten geraden Linie, der Leitlinie oder Directrix, gleiche Abstände hat. Die Gerade, welche durch den Brennpunkt geht und auf der Directrix senkrecht steht, heisst Axe und jede mit dieser parallele Gerade ein Durchmesser der Parabel.

Aus der angeführten Eigenschaft der Parabel ergiebt sich folgendes mechanische Verfahren dieselbe zu verzeichnen.

Es stelle DD' (Fig. 16.) die Gerade vor, welche Directrix werden soll, und abc einen bei c rechtwinkligen Winkelhaken, ferner sei ein Faden von der Länge des Schenkels ac mit seinen Enden in c und in dem Brennpunkte F befestigt und

werde durch einen Zeichenstift *st* an den Schenkel *ac* fortwährend straff angespannt, während der Winkelhaken so an der Directrix entlang fortgeschoben wird, dass der Schenkel *ab* immer die letztere deckt. Die Linie, welche bei dieser Operation vom Zeichenstifte beschrieben wird, ist eine Parabel.

§. 31. Gleichung der Parabel.

Es sei *DD'* (Fig. 17.) die Directrix, *F* der Brennpunkt, $BF = p$ dessen Abstand von der Directrix. Wir nehmen die Axe *AX* als Abscissenaxe und den Mittelpunkt *A* von *BF* als Anfangspunkt der Coordinaten, so ist, wenn *P* ein beliebiger Punkt der Curve ist, $PQ = y$, $AQ = x$. Nun ist, wenn wir den Leitstrahl *FP* ziehen, $PF^2 = PQ^2 + FQ^2$

$$= y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2.$$

Nun ist aber nach der §. 30. angegebenen Eigenschaft der Parabel

$$FP = PR = BQ = x + \frac{1}{2}p,$$

folglich haben wir

$$(x + \frac{1}{2}p)^2 = y^2 + (x - \frac{1}{2}p)^2,$$

woraus sich durch leichte Entwicklung die einfache Gleichung

$$y^2 = 2px \dots (J)$$

als Gleichung der Parabel ergibt.

§. 32. Discussion der Gleichung der Parabel.

a) Aus der Gleichung

$$y^2 = 2px$$

ergiebt sich

$$y = \pm \sqrt{2px},$$

woraus hervorgeht, dass nur für positive Werthe von *x* reelle Werthe von *y* erhalten werden, dass die Curve also nur auf einer Seite der Ordinatenaxe liegt.

b) Aus dem doppelten Zeichen für *y* ergibt sich jedoch, dass die Curve auf beiden Seiten der Abscissenaxe symmetrisch liegt,

c) Da $x = 0$ auch $y = 0$ giebt, so geht die Curve durch den Anfangspunkt der Coordinaten.

d) Bezeichnen wir die durch den Brennpunkt gehende

doppelte Ordinate MM' (Fig. 17.) wieder mit dem Namen Parameter, so finden wir aus der Gleichung der Parabel

$$FM = \sqrt{2p}, AF = \sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = p,$$

folglich $MM' = 2p$. Bezeichnen wir den Parameter mit P , so haben wir als Gleichung der Parabel

also dieselbe, welche aus der Gleichung (E) §. 28. hervorging, wenn $a = \infty$ gesetzt wurde. In Uebereinstimmung mit dem Früheren können wir nun sagen, die Parabel sei eine Ellipse, deren zweiter Scheitel (oder auch Brennpunkt) in der Unendlichkeit liege.

e) Ist der Parameter der Parabel gegeben, so lässt sich letztere auf eine leichte Weise durch Punkte verzeichnen. Man trage auf einer geraden Linie den halben Parameter $BF = \frac{1}{2}P$ (Fig. 18.) ab, nehme F als Brennpunkt und das in B auf BF errichtete Loth DD' als Directrix; dann ist zunächst der Mittelpunkt A von BF ein Punkt der Parabel. Zieht man ferner parallel mit DD' die beliebigen Linien LL' , MM' , NN' , PP' etc. und schlägt mit den Abständen derselben von der Directrix, also mit BC , BF , BE , BG , BH von F aus Kreisbögen bis zum Durchschnitt bezüglich mit LL' , MM' , NN' , PP' , QQ' , so sind die Durchschnittspunkte L , M , N , P , Q und L' , M' , N' , P' , Q' Punkte der gesuchten Parabel.

f) Suchen wir den Punkt (N Fig. 19.) der Parabel, für welchen Abscisse und Ordinate gleich sind, so haben wir

$$y^2 = Py, \\ y = \pm P.$$

Diese doppelte Ordinate $NN' = 2P$ hat die Eigenschaft, dass jedes auf ihr errichtete und bis zur Parabel verlängerte Loth PQ das harmonische Mittel ist zwischen den Abschnitten NP und $N'P$ jener doppelten Ordinate. Setzen wir nämlich $PN' = a$, $PN = b$ und $PQ = z$ und ziehen noch die Ordinate QR , so ist

$$QR = BP = \frac{1}{2}(a + b) - b \\ = \frac{1}{2}(a - b) \dots (1)$$

und die zugehörige Abscisse

$$\begin{aligned} AR &= AB - BR \\ &= NB - PQ \\ &= \frac{1}{2}(a+b) - z \dots (2) \end{aligned}$$

Nach der Gleichung der Parabel ist nun

$$QR^2 = AR \times \text{Parameter}$$

$$= AR \cdot NB$$

oder wegen (1) und (2)

$$\begin{aligned} \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a+b}{2} - z\right) \left(\frac{a+b}{2}\right) \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - z \cdot \frac{a+b}{2}, \end{aligned}$$

mithin

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} \cdot z &= \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) \\ &= ab, \end{aligned}$$

$$\text{folglich } z = \frac{2ab}{a+b},$$

w. z. b. w.

Es ergibt sich hieraus, dass die Parabel ganz in analoger Weise zur Aufsuchung des harmonischen Mittels zwischen zwei Linien benutzt werden kann, wie der Kreis zur Aufsuchung des geometrischen. *)

*) Diese Eigenschaft der Parabel, welche ich im Jahre 1845 fand, theilte ich einem mir befreundeten englischen Mathematiker, dem Herrn Dr. William Rutherford an der Militairakademie in Woolwich mit. Dieser stellte sie nachmals in der Zeitschrift: The Mathematician. Edited by William Rutherford and Stephen Fenwick, in folgender Gestalt als Theorem auf:

AB is a given straight line, and C a given point in it; on AB as hypotenuse describe an isosceles right angled triangle ADB, and let a parabola be described about the triangle ADB having its vertex in the angular point D; through C draw CH perpendicular to AB meeting the parabola in H, then CH will be an harmonic mean between AC and CB.

In Folge dessen brachte Vol. III. No. 3. genannter Zeitschrift mehrere Lösungen. Da eine Vergleichung verschiedener Behandlungsweisen für den Anfänger immer lehrreich ist, so theile ich diese Lösungen im Nachfolgenden mit.

Die Lösung der Aufgabe: Zwischen zwei Geraden a und b das harmonische Mittel zu finden, gestaltet sich nun in folgender einfachen Weise: Man construire eine Parabel, welche den Parameter $\frac{1}{2}(a+b)$ hat, trage in diese $a+b$ als doppelte Ordinate ein und errichte im Zusammen-

[First Solution. Dr. Burns; and similarly by Mr. S. Ashton, Blackburn.]

Draw DE perpendicular to AB , then since the triangle ADB is isosceles and right angled, $AE=EB=ED$; and by a property of the parabola

$$EA^2 : EC^2 = ED : ED - CH;$$

therefore

$$EA^2 : EA = EC^2 : EA - CH,$$

$$\text{or } EA : 1 = EC^2 : EA - CH;$$

$$\text{and } EA^2 - EC^2 = AC \cdot CB = EA \cdot CH,$$

$$\text{hence } BC : BC - CH = EA : EC;$$

$$\text{also } AC : CH - AC = EA : EC;$$

consequently $BC : AC = BC - CH : CH - AC$, and CH is therefore an harmonic mean between AC und BC .

[Second Solution. Messrs. P. Elliot, Lamesiey, and John Stafford, Newcastle.]

Let E be the middle of AB , then by the ordinary properties of the parabola, we have

$$DE(=EB) : EB = EB : P, \therefore P = EB,$$

$$2P(=AC+CB) : 2AC = CB : CH;$$

$$\therefore AC - CB : AC + CB = CH - CB : CB,$$

$$\therefore 2AC : 2CB = CH : 2CB - CH,$$

$$\therefore AC : CH = CB : 2CB - CH,$$

$$\therefore AD : CB = AC - CH : CH - BC.$$

Hence AC , CH and CB are in harmonic progression.

[Third Solution. Mr. W. H. Levy, Shalburn.]

Bisect AB in E , and join ED . Then by Hutton, prop. I. cor. 5, of the parabola, $AC \cdot CB : EB^2 = CH : ED$;

$$\text{hence } CH = \frac{ED \cdot AC \cdot CB}{EB^2}.$$

But is obvious that $DE=EB$, therefore

$$CH = \frac{AC \cdot CB}{EB} = \frac{2AC \cdot CB}{2EB} = \frac{2AC \cdot CB}{AC+CB};$$

hence the truth of the theorem.

Diesen Lösungen ist noch die Note hinzugefügt:

Correct and elegant solutions were received from Lieut. A. R. Clarke, R. E.; and Messrs. H. Goodwyn, Mr. Stoton's Academy, Wimbledon; J. B. Hollinsworth, Mr. Hoole's Academy, Blackburn; W. Mortimer, Seedley, Manchester; David Maver, Aberdeen; R. W. Wright, M. A., London; Stephen Watson, Shotley Bridge; N. Smyth, Galway, and A. D. B.

stossungspunkte von a und b : eine Senkrechte darauf bis zur Parabel. Diese ist das gesuchte harmonische Mittel.

§. 33. *Polargleichung der Parabel.*

Setzen wir (Fig. 20.) den *Radius vector* $FP = r$, die *Amplitude* $AFP = \varphi$ entstanden gedacht durch Drehung in der Richtung AP , so ist, wenn P den Parameter bezeichnet,

$$\begin{aligned} AF &= AB = \frac{1}{2} P, \\ FP &= r = BF + FQ \\ &= \frac{1}{2} P + FQ, \end{aligned}$$

$$\text{da aber } FQ = r \cos(180 - \varphi) = -r \cos \varphi,$$

$$\text{so erhält man } r = \frac{1}{2} P - r \cos \varphi$$

$$\text{oder } r = \frac{\frac{1}{2} P}{1 + \cos \varphi}$$

als die gesuchte Polargleichung.

Sechstes Kapitel.

Die Hyperbel.

§. 34. *Charakteristische Eigenschaft der Hyperbel.*

Mit dem Namen *Hyperbel* bezeichnet man eine Curve von der Beschaffenheit, dass die Differenz der Abstände (*Leitstrahlen*, *Radii vectores*) jedes ihrer Punkte von zwei festen Punkten (den *Brennpunkten*) constant ist.

Ist P (Fig. 21.) ein Punkt der Curve, so ist $FP' - FP$ einer constanten Grösse ($2a$) gleich. Da F, F' feste Punkte sind, so ist auch ihr Abstand, die *Excentricität* einer constanten Grösse ($2e$) gleich.

§. 35. *Gleichung der Hyperbel.*

Nehmen wir die *Excentricität* FF' (Fig. 22.) als *Abcissenaxe* und die in ihrer Mitte errichtete Senkrechte AY als *Ordinatenaxe*, so erhalten wir auf ganz analoge Weise wie in

§. 26. $FP - FP' =$

$$2a = \sqrt{y^2 + (x+e)^2} - \sqrt{y^2 + (x-e)^2}$$

$$2a + \sqrt{y^2 + (x-e)^2} = \sqrt{y^2 + (x+e)^2},$$

woraus nach gehöriger Entwicklung die Gleichung

$$a^2 y^2 - (e^2 - a^2) x^2 = -a^2 (e^2 - a^2),$$

und wenn man $e^2 - a^2 = b^2$ setzt, was erlaubt ist, da $e > a$ ist, so erhält man

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

erhalten, welches die gesuchte Gleichung der Hyperbel ist.

§. 36. Discussion der Gleichung der Hyperbel.

a) Aus der Gleichung

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 \dots (K)$$

erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \dots (L),$$

woraus man ersieht, dass die Curve gegen beide Axen symmetrisch liegt.

b) Aus Gleichung (L) geht gleichzeitig hervor, dass y nur für $x \geq \pm a$ reelle Werthe hat. Da $x = \pm a$ den Werth $y = 0$, und $x < \pm a$ imaginäre Werthe für y giebt, so folgt hieraus, dass die Curve aus zwei nicht zusammenhängenden Zweigen besteht und die der Ordinatenaxe am nächsten liegenden Punkte die Durchschnittspunkte (M, M' (Fig. 21.) der Curve mit der Abscissenaxe sind. Der Abstand dieser Punkte, welche die Scheitel der Hyperbel heissen, ist $2a$ und folglich der Differenz zweier zusammengehörigen Leitstrahlen gleich. Dieser Abstand wird die Hauptaxe oder die grosse Axe der Hyperbel genannt. Da $x = 0$ den Werth $y = b\sqrt{-1}$ giebt, so sind die auf der Ordinatenaxe beiderseits abgetragenen Strecken $\pm b$ keine Ordinaten der Curve und die Länge $2b$, welche zwar ebenfalls wie bei der Ellipse die kleine oder Nebenaxe der Hyperbel genannt wird, ist keine Dimension der Curve. Der Anfangspunkt der Coordinaten A heisst auch hier der Mittelpunkt der Curve.

c) Aus (L) ersieht man ferner, dass y mit x über jede beliebige Grenze hinaus wachsen kann, woraus hervorgeht, dass

die beiden Zweige der Curve sich in den vier Quadranten des Axensystems bis ins Unendliche erstrecken.

d) Den Parameter der Hyperbel erhält man auf dieselbe Weise, wie bei der Ellipse dadurch, dass man $x = e$ setzt und findet auch denselben Werth

$$p = \frac{2b^2}{a}$$

e) Wird in der Gleichung der Hyperbel $b = a$ gesetzt, so geht sie in die einfache Gleichung

$$x^2 - y^2 = a^2$$

über. Die hierdurch ausgedrückte Curve, welche für die Hyperbeln das ist, was der Kreis für die Ellipsen ist, wird gleichseitige Hyperbel genannt.

f) Aus dem Charakter der Hyperbel ergibt sich folgende mechanische Verzeichnung derselben. Man befestige in dem einen Brennpunkt (F' Fig. 22.) ein Lineal von beliebiger Länge (l) und an dessen anderem Ende einen Faden (f), der um die angenommene Hauptaxe kürzer ist, als das Lineal ($l - f = 2a$), das zweite Ende des Fadens befestige man nun im zweiten Brennpunkte (F) und spanne den Faden mittelst eines Zeichenstifts (ST) an das Lineal straff an. Wird das Lineal um F' gedreht, so beschreibt der Stift einen Theil der Curve. Es ist nämlich fortwährend

$$\begin{aligned} F'S - FS &= (F'S + SL) - (FS + SL) \\ &= l - f = 2a. \end{aligned}$$

Gleichzeitig ergibt sich ohne Weiteres, dass man eine Hyperbel durch Punkte verzeichnen kann, wenn man mit zwei beliebigen Linien, deren Differenz $= 2a$ ist, aus den Brennpunkten Kreise beschreibt. Ihre Durchschnittspunkte sind Punkte der Hyperbel.

§, 37. Polargleichung der Hyperbel.

Durch ein ganz analoges Verfahren wie bei der Ellipse erhält man

$$r = \frac{e^2 - a^2}{a + e \cos \varphi}$$

und wenn $\frac{e}{a} = \varepsilon$ gesetzt wird,

$$\text{oder } r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \dots (M)$$

$$r = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Analog §. 28. erhält man als Scheitelgleichung

$$a^2 y^2 = px + p \cdot \frac{x^2}{2a} \dots (N).$$

Siebentes Kapitel.

Méthode der Tangenten.

§. 37. Erklärungen.

Es sei BC (Fig. 23.) das Stück einer Curve, SMM' eine Sekante, welche die Curve in M und M' schneidet. Denken wir uns diese Sekante um den Punkt M so gedreht, dass M' dem Punkte M immer näher rückt, so wird nothwendiger Weise M' einmal mit M zusammenfallen müssen. Ist die Sekante durch Drehung in die eben angegebene Lage (TM) gekommen, so nennt man sie eine Tangente an die Curve. Entsprechend den §. 22. gegebenen Definitionen heisst die Linie MN , welche senkrecht auf TM steht, die Normale des Punkts M die Projection von TM auf die Abscissenaxe, d. i. TP die Subtangente und die Projection von MN , d. i. NP die Subnormale.

1. Tangenten an der Ellipse.

§. 38. Gleichungen der Tangente und Normale an der Ellipse.

a) Es sei $M(x', y')$ der Punkt, an welchen eine Tangente gezogen werden soll, so ist die Gleichung einer durch M und einen zweiten Punkt $M'(x'', y'')$ gehenden Sekante nach §. 9.

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \dots (1)$$

wo $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen die Sekante mit der Abscissenaxe macht. Da die Punkte M und M' Punkte einer Ellipse sind, so haben wir noch die Gleichungen

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \dots (2)$$

$$\text{und } a^2 y''^2 + b^2 x''^2 = a^2 b^2 \dots (3).$$

Aus (2) und (3) erhalten wir durch Subtraktion

$$a^2 (y'^2 - y''^2) + b^2 (x'^2 - x''^2) = 0$$

$$\text{oder } a^2 (y' + y'')(y' - y'') = -b^2 (x' + x'')(x' - x''),$$

woraus wir erhalten

$$\frac{y' - y''}{x' - x''} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''} \dots (4).$$

Setzen wir diesen Werth in (1) ein, so erhalten wir

$$y - y' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x' + x''}{y' + y''} (x - x') \dots (5)$$

als Gleichung der Sekante. Geht diese in die Tangente über, so wird $x'' = x'$ und $y'' = y'$ und wir erhalten aus (5)

$$y - y' = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x')$$

als Gleichung der Tangente oder nach gehöriger Entwicklung und mit Rücksicht darauf, dass

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \text{ ist,}$$

$$a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 b^2 \dots (6).$$

Bezeichnen wir im Folgenden den Winkel, welchen die Tangente an eine Curve mit der Abscissenaxe macht, mit τ , so ist gleichzeitig bei der Ellipse

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \dots (7).$$

Da $\operatorname{tg} \tau$ seinen Werth nicht verändert, wenn x', y' zugleich negativ werden, so ergibt sich hieraus, dass die an den Punkt m (Fig. 24.) gezogene Tangente der an M gezogenen parallel ist.

b) Ohne Weiteres erhalten wir aus §. 13. als Gleichung der Normale MN

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x') \dots (8).$$

§. 39. Subtangente und Subnormale bei der Ellipse.

a) Die Subtangente TP (Fig. 24.) bestimmt sich aus der Gleichung

$$TP = \frac{MP}{\operatorname{tg} MTP}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{y'}{\operatorname{tg}(180 - \tau)} \\
 &= -\frac{y'}{\operatorname{tg} \tau}, \\
 \text{und weil } \operatorname{tg} \tau &= -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \\
 TP &= \frac{a^2 y'^2}{b^2 x'} \\
 &= \frac{a^2 b^2 - b^2 x'^2}{b^2 x'} \quad (\text{aus der Gl. der Ellipse}), \\
 \text{folglich } TP &= \frac{a^2 - x'^2}{x'}.
 \end{aligned}$$

b) Die Subnormale NP bestimmt sich aus der Gleichung

$$\begin{aligned}
 NP &= MP \cdot \operatorname{tg} NMP \\
 &= -y' \operatorname{tg} \tau \\
 &= \frac{b^2 x'}{a^2}.
 \end{aligned}$$

§. 40. Folgerungen.

a) Tangenten an die Scheitel der Ellipse.

Setzen wir in die Gleichung (6) §. 38. die Werthe $x' = \pm a$, $y' = 0$ ein, so geht sie über in

$$x = \pm a.$$

Die an M und M' (Fig. 25.) gezogenen Tangenten sind also der Ordinatenaxe parallel.

Setzen wir dagegen in dieselbe Gleichung $x' = 0$, $y' = \pm b$ ein, so geht sie über in

$$y = \pm b,$$

d. h. die Tangenten an die Scheitel N , N' sind der Abscissenaxe parallel.

b) Setzen wir $y = 0$ in der Gleichung

$$a^2 y y' + b^2 x x' = a^2 b^2$$

so erhalten wir $x = \frac{a^2}{x'}$

als Abscisse des Durchschnittspunkts der Tangente mit der Abscissenaxe. Da der Werth dieser Abscisse nur von der Haupt-

axe der Ellipse und der Abscisse des Berührungspunkts abhängig ist, so folgt hieraus der Satz:

Wenn man über einer und derselben Hauptaxe beliebig viel Ellipsen construirt, so gehen die zu einerlei Abscisse in sämmtlichen Ellipsen gehörigen Tangenten durch einen und denselben Punkt der Abscissenaxe.

Auf diesen Satz gründet sich ein sehr bequemes Verfahren, an einen gegebenen Punkt M , (Fig. 26.) einer Ellipse eine Tangente zu ziehen. Man schlage über der Hauptaxe einen Kreis, verlängere die Ordinate PM bis M' , ziehe an M' die Tangente TM' und verbinde T mit M , dann ist TM die gesuchte Tangente.

c) Die Subnormale bekommt für $x' = a$ ihren grössten Werth, nämlich

$$\frac{b^2}{a}$$

und wird also gleich dem halben Parameter.

§. 41. Supplementarsehnen.

a) Für den Durchschnittspunkt zweier durch $M (+a, 0)$ und $M' (-a, 0)$ gezogenen Geraden erhält man (vergl. §. 20.)

$$\xi = \frac{A + A'}{A - A'} \cdot a,$$

$$\eta = \frac{2aAA'}{A - A'},$$

Soll der Durchschnittspunkt auf der Ellipse liegen, so müssen ξ und η der Gleichung der Ellipse genügen, wir erhalten somit die Bedingungsgleichung

$$a^2 \cdot \left(\frac{2aAA'}{A - A'} \right)^2 + b^2 \left(\frac{A + A'}{A - A'} \right)^2 a^2 = a^2 b^2,$$

welche nach gehöriger Entwicklung übergeht in

$$AA' (a^2 AA' + b^2) = 0 \dots (\alpha),$$

welcher Gleichung durch $A = 0$ und $A' = 0$ (vergl. §. 20.) oder auch durch

$$a^2 AA' + b^2 = 0$$

$$\text{oder } AA' = -\frac{b^2}{a^2} \dots (\beta)$$

genügt wird. Die Supplementarsehnen bei der Ellipse schliessen also niemals einen rechten Winkel ein, weil die Gleichung

allein die Bedingung für das Senkrechtstehen derselben ist.

b) Die Supplementarsehnen können vermöge der Bedingungsgleichung (β) dazu dienen, eine Tangente an einen Punkt der Ellipse zu ziehen. Verbindet man nämlich den Punkt $L(x', y')$ (Fig. 27.) mit dem Mittelpunkt und ist die Gleichung dieser Geraden

$$y = \mathfrak{A}'x,$$

so ist $\mathfrak{A}' = \frac{y'}{x'};$

nun ist aber

$$\text{tg } LTA = \mathfrak{A} = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \quad \S. 38. \quad (7);$$

$$\text{folglich } \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{A}' = -\frac{b^2}{a^2} = AA' \text{ nach } (\beta).$$

Wird also $\mathfrak{A}' = A'$ genommen, so ist auch $\mathfrak{A} = A$.

Um also an L eine Tangente zu ziehen, ziehe man AL , ferner $MP \parallel AL$, dann PM' und endlich $LT \parallel PM'$. LT ist dann die verlangte Tangente.

§. 42. Lage der Tangente und Normale einer Ellipse gegen die Leitstrahlen.

Da der Leitstrahl FM (Fig. 28.) durch die Punkte $F(e, 0)$ und $M(x' y')$ geht, so ist seine Gleichung (§. 9.)

$$y = \frac{y'}{x' - e} \cdot (x - x'),$$

$$\text{wo } \text{tg } MFT = A = \frac{y'}{x' - e} \dots (\gamma);$$

ferner ist die Gleichung der Normale MN nach §. 38. (8)

$$y - y' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x'),$$

$$\text{wo } \text{tg } MNT = A' = \frac{a^2 y'}{b^2 x'} \dots (\delta).$$

Nun ist $\varphi = MFT - MNT,$

$$\text{tg } \varphi = \frac{A - A'}{1 + AA'}$$

oder nach Einsetzung der Werthe (γ) und (δ) und bei gehöriger Reduktion

$$\text{tg } \varphi = \frac{ey'}{b^2} \dots (\varepsilon).$$

Da der Leitstrahl FM durch die Punkte $F(-e, 0)$ und $M(x', y')$ geht, so ist seine Gleichung

$$y = \frac{y'}{x' + e} (x - x'),$$

$$\text{wo } \operatorname{tg} MF'N = A'' = \frac{y'}{x' + e} \dots (\zeta).$$

Wir haben deshalb

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi' &= \operatorname{tg} (MNF - MF'N) \\ &= \frac{A' - A''}{1 + A'A''} \end{aligned}$$

oder nach Einsetzung der Werthe (δ) und (ζ) und bei gehöriger Reduktion

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{ey'}{b^2} \dots (\eta).$$

Aus der Gleichheit von (ε) und (η) folgt der Satz:

Der Winkel, welchen die beiden an einen Punkt der Ellipse gezogenen Leitstrahlen bilden, wird von der Normale halbart.

Ohne Weiteres ergibt sich hieraus, dass auch

$$TMF = SMF' = NMT$$

ist, und wir gelangen dadurch zu folgender neuen Methode, an einen Punkt der Ellipse eine Tangente zu ziehen:

Um an einen Punkt der Ellipse eine Tangente zu ziehen, ziehe man an diesen Punkt beide Leitstrahlen und halbire den durch Verlängerung des einen über den gegebenen Punkt hinaus entstandenen Aussenwinkel. Die Halbierungslinie ist die gesuchte Tangente.

Aus der Gleichheit von φ und φ' ergibt sich noch die charakteristische Eigenschaft einer elliptischen Spiegelfläche, dass die von einem Brennpunkte ausgehenden Licht-, Wärme- oder Schallstrahlen von der Fläche so reflectirt werden, dass sie sich im anderen Brennpunkte wieder vereinigen. (Das Ohr des Dionys.) Nach Planim. II. §. 48^b. hat man schliesslich noch den Satz:

In der Ellipse wird die Excentricität durch Tangente und Normale jedes Punkts harmonisch getheilt.

§. 43. Von einem Punkt ausserhalb einer Ellipse an diese eine Tangente zu ziehen.

Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich ebenfalls leicht aus dem Vorhergehenden. Macht man nämlich $MN = MF$, oder was eben so viel sagen will, $F'N = 2a$, und verbindet N mit T , so ist $\triangle NMT \cong \triangle FMT$, aber auch, wenn P ein beliebiger Punkt auf der Tangente ist

$$\triangle MNP \cong \triangle FMP$$

und deshalb $PN = PF$.

Soll deshalb von P eine Tangente an die Ellipse gezogen werden, so schlage man von P aus mit PF und von F' aus mit $2a$ Kreisbögen und verbinde F' mit dem Durchschnittspunkte N . Diese Linie schneidet die Ellipse im Berührungspunkte.

Der zweite Durchschnittspunkt der Kreise bestimmt auch eine zweite Tangente.

II. Tangenten an der Parabel.

§. 44. Gleichungen der Tangente und Normale an der Parabel.

a) Es sei $M(x', y')$ der Punkt, an welchen eine Tangente gezogen werden soll, so ist die Gleichung einer durch M und einen zweiten Punkt $M'(x'', y'')$ gehenden Sekante nach §. 9.

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \dots (1),$$

wo wieder $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen die Sekante mit der Abscissenaxe macht. Da die Punkte M und M' Punkte einer Parabel sind, so müssen ihre Coordinaten auch der Gleichung der Parabel genügen und haben wir deshalb

$$\begin{aligned} y'^2 &= 2px', \\ y''^2 &= 2px'', \\ y'^2 - y''^2 &= 2p(x' - x'') \\ \frac{y' - y''}{x' - x''} &= \frac{2p}{y' + y''} \dots (2). \end{aligned}$$

Wird (2) in (1) substituirt, so erhalten wir

$$y - y' = \frac{2p}{y' + y''} (x - x') \dots (3).$$

Geht die Sekante in eine Tangente über, d. h. fällt M' mit M zusammen und wird also $y'' = y'$, so geht (3) über in

$$y - y' = \frac{p}{y'} (x - x') \dots (4)$$

$$\text{oder } yy' - y'^2 = px - px'$$

$$\text{oder } yy' = p(x + x') \dots (5),$$

welches die Gleichung der Tangente ist; wo bei voriger Bezeichnung

$$tg \tau = \frac{p}{y'} \dots (6) \text{ ist.}$$

b) Die Gleichung der Normale MN erhalten wir, wenn wir in (4) $-\frac{y'}{p}$ statt $\frac{p}{y'}$ einsetzen, sie ist nämlich

$$y - y' = -\frac{y'}{p} (x - x')$$

$$\text{oder } p(y - y') + y'(x - x') = 0 \dots (7).$$

§. 45. Subtangente und Subnormale bei der Parabel.

a) Die Subtangente TP bestimmt sich aus

$$\begin{aligned} TP &= \frac{y'}{tg MTP} = \frac{y'}{tg \tau} \\ &= \frac{y'^2}{p} = \frac{2px'}{p} \end{aligned}$$

$$\text{oder } TP = 2x' \dots (8).$$

Da die Subtangente gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunkts ist, so ergibt sich hieraus folgendes leichtes Verfahren, an einen Punkt der Parabel eine Tangente zu ziehen:

Man verlängere die Abscisse des Berührungspunkts über den Scheitel hinaus um ihre eigene Länge und verbinde den Abtragungspunkt mit dem Berührungspunkte, so ist die Verbindungslinie die gesuchte Tangente.

b) Die Subnormale PN findet man aus

$$\begin{aligned} PN &= y' tg \tau = y' \cdot \frac{p}{y'} \\ &= p. \end{aligned}$$

Die Subnormale ist demnach bei der Parabel eine constante Grösse und dem halben Parameter gleich.

§. 46. Folgerungen.

a) Für den Scheitel der Parabel ist $x' = y' = 0$, folglich

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{0} = \infty,$$

Die Parabel wird also im Scheitel durch die Ordinatenaxe berührt.

b) Aus $\operatorname{tg} \tau = \frac{p}{y'}$ ersieht man ferner, dass bei wachsendem y' der Werth der Tangente sich immer mehr der Null, die Tangente selbst sich also einer der Axe parallelen Geraden nähert.

c) Da für $y' = p$ der Werth von $\operatorname{tg} \tau = 1$ wird, so bilden die an die Endpunkte des Parameters gezogenen Tangenten mit der Axe Winkel von 45° , stehen also auf einander selbst senkrecht.

§. 47. Lage der Tangente und Normale einer Parabel gegen den Leitstrahl.

a) Da der Leitstrahl FM (Fig. 30.) durch die Punkte F ($\frac{1}{2}p, 0$) und M (x', y') geht, so ist dessen Gleichung

$$y = \frac{y'}{x' - \frac{1}{2}p} (x - x'),$$

$$\text{wo } \operatorname{tg} MFN = A = \frac{y'}{x' - \frac{1}{2}p} \dots (\alpha)$$

ist. Da ferner $\operatorname{tg} MTF = A' = \frac{p}{y'} \dots (\beta)$

$$\text{und } TMF = \varphi = MFN - MTF,$$

so erhält man nach Einsetzung der Werthe (α) und (β)

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A - A'}{1 + AA'}$$

$$= \frac{p}{y'}.$$

Es ist somit die Tangente gegen die Axe und den Leitstrahl unter gleichen Winkeln geneigt.

Hieraus ergibt sich folgendes einfache Verfahren, an einen Punkt M eine Tangente zu ziehen:

Man ziehe an den gegebenen Punkt den Leitstrahl, trage letzteren vom Brennpunkte aus nach dem Scheitel zu auf der Axe ab und verbinde den Abtragungspunkt mit dem gegebenen Punkt. Die Verbindungslinie ist eine Tangente an die Parabel.

b) Ziehen wir durch M einen Durchmesser MC , so ist $SMC = \tau = \varphi$, folglich auch $CMN = NMF$, d. h. die Normale halbt den Winkel zwischen dem Leitstrahl und Durchmesser (vergl. §. 42.).

Aus der Gleichheit dieser Winkel ergibt sich für einen parabolischen Hohlspiegel die Eigenschaft, dass alle parallel mit der Axe auffallenden Licht-, Wärme- und Schallstrahlen so reflectirt werden, dass sie sich im Brennpunkte vereinigen; und umgekehrt, die vom Brennpunkte kommenden parallel mit der Axe reflectirt werden. Hierdurch ist auch der Name Brennpunkt gerechtfertigt.

§. 48. Von einem Punkte ausserhalb einer Parabel an diese eine Tangente zu ziehen.

Die Lösung dieser Aufgabe ergibt sich jetzt ebenfalls leicht aus dem Vorhergehenden. Verlängert man (Fig. 30.) MC rückwärts bis zur Directrix, so ist DMT ebenfalls $= \varphi$. Ist also P ein beliebiger Punkt der Tangente, so ist, wenn man PD , PF zieht, $\triangle DMP \cong \triangle FMP$ und deshalb

$$DP = PF \text{ und } DPM = FPM.$$

Um also von einem Punkte (P) ausserhalb einer Parabel an diese eine Tangente zu ziehen, schlage man von P aus mit dessen Abstände vom Brennpunkte einen Kreis, verbinde dessen Durchschnittspunkt D mit P und halbire den Winkel DPF . Die Halbierungslinie ist die gesuchte Tangente.

Der zweite Durchschnittspunkt des Kreises mit der Directrix bestimmt auch noch eine zweite Tangente.

III. Tangenten an der Hyperbel.

§. 49. Gleichungen der Tangente und Normale an der Hyperbel.

a) Es sei $M(x', y)$ (Fig. 31.) der Punkt, an welchen eine Tangente gezogen werden soll, so ist die Gleichung einer durch M und einen beliebigen zweiten Punkt $M'(x'', y'')$ gezogenen Sekante

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''} (x - x') \dots (1),$$

wo $\frac{y' - y''}{x' - x''}$ die trigonometrische Tangente des Winkels ist, welchen die Sekante mit der Abscissenaxe bildet. Da angenommenemassen die Punkte M und M' Punkte der Hyperbel sind, so haben wir noch die Gleichungen

$$a^2 y'^2 - b^2 x'^2 = -a^2 b^2,$$

$$a^2 y''^2 - b^2 x''^2 = -a^2 b^2$$

$$\text{und hieraus } a^2 (y'^2 - y''^2) = b^2 (x'^2 - x''^2)$$

$$\text{und folglich } \frac{y' - y''}{x' - x''} = \frac{b^2}{a^2} \frac{x' + x''}{y' + y''} \dots (2).$$

Setzen wir diesen Werth in (1) ein, so erhalten wir

$$y - y' = \frac{b^2}{a^2} \frac{x' + x''}{y' + y''} (x - x') \dots (3).$$

Geht die Sekante in die Tangente über, so wird $x'' = x'$, $y'' = y'$ und Gleichung (3) geht über in

$$y - y' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} (x - x') \dots (4)$$

oder nach gehöriger Reduktion

$$a^2 y y' - b^2 x x' = -a^2 b^2 \dots (5),$$

welches die Gleichung der gesuchten Tangente ist.

$$\text{Aus (2) ergibt sich } \operatorname{tg} \tau = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

Da x' , y' bei negativen Vorzeichen denselben Werth für $\operatorname{tg} \tau$ geben, so sind die an die Endpunkte eines Durchmessers gezogenen Tangenten parallel.

b) Die Gleichung der Normale MN erhalten wir, wenn

$$\text{wir in (4) } -\frac{a^2 y'}{b^2 x'} \text{ statt } \frac{b^2 x'}{a^2 y'}$$

einsetzen. Sie ist demnach

$$y - y' = -\frac{a^2 y'}{b^2 x'} (x - x') \dots (6).$$

§. 50. Subtangente und Subnormale bei der Hyperbel.

a) Die Subtangente PT bestimmt sich aus

$$PT = \frac{y'}{\operatorname{tg} \tau} = \dots$$

$$\begin{aligned}
 (I) \dots &= \frac{a^2 y'^2}{b^2 x'} \\
 &= \frac{b^2 x'^2 - a^2 b^2}{b^2 x'} \\
 &= \frac{x'^2 - a^2}{x'}.
 \end{aligned}$$

b) Die Subnormale ist $PN = y' \operatorname{tg} \tau$

$$= \frac{b^2 x'}{a^2}.$$

§. 51. Folgerungen.

a) Tangenten an die Scheitel der Hyperbel.

Für $x' = \pm a$ und $y = 0$ geht die Gleichung (5) §. 49. über in $x = \pm a$.

Es findet also hier dasselbe statt, wie bei der Ellipse (§. 40.).

b) Setzt man in der Gleichung der Tangente

$$y = 0,$$

so erhält man $x = \frac{a^2}{x'},$

also ganz denselben Werth, wie bei der Ellipse. Eine ähnliche Anwendung der gleichseitigen Hyperbel zur Tangentenconstruction, wie die des Kreises bei der Ellipse würde voraussetzen, dass man an eine gleichseitige Hyperbel eine Tangente bereits ziehen könne.

§. 52. Supplementarsehnen.

Haben $A, A', \mathfrak{A}, \mathfrak{A}'$ eine analoge Bedeutung wie in §. 41., so ergibt sich bei analoger Entwicklung auch hier

$$AA' = \mathfrak{A}\mathfrak{A}'$$

und folglich auch ein analoges Verfahren eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen.

§. 53. Lage der Tangente und Normale einer Hyperbel gegen die Leitstrahlen.

Da der Leitstrahl FM (Fig. 31.) durch die Punkte $F(e, 0)$ und $M(x', y')$ geht, so ist

$$\operatorname{tg} MFN = A = \frac{y'}{x' - e},$$

$$\operatorname{tg} MTN = A' = \frac{b^2 x'}{a^2 y'},$$

$$\text{und bei } F'M \operatorname{tg} MF'N = A'' = \frac{y'}{x' + e}.$$

$$\text{Setzt man diese Werthe in } \operatorname{tg} \varphi = \frac{A - A'}{1 + AA'},$$

$$\text{und } \operatorname{tg} \varphi' = \frac{A' - A''}{1 + A'A''},$$

so werden auch hier gleiche Werthe $\left(\frac{b^2}{ey'}\right)$ erhalten. Die

Halbirungslinie des von den Leitstrahlen gebildeten Winkels ist also die Tangente. Das Verfahren, eine Tangente zu ziehen, ist also dem bei der Ellipse analog.

Ein von einem Brennpunkte ausgehender Lichtstrahl wird von einem hyperbolischen Hohlspiegel so reflectirt, dass er dem Auge vom zweiten Brennpunkte herzukommen scheint.

§. 54. Von einem Punkte ausserhalb einer Hyperbel an diese eine Tangente zu ziehen.

Zieht man an den Berührungspunkt den zweiten Leitstrahl $F'M$ (Fig. 32.) und trägt $MN = MF$ ab, oder (was ebensoviel heisst) $F'N = 2a$, so ist, wenn ein beliebiger Punkt P der Tangente mit N und F verbunden wird,

$$\triangle MNP \cong \triangle FMP$$

und deshalb $PN = PF$.

Soll deshalb von P eine Tangente an die Hyperbel gezogen werden, so schlage man von P aus mit PF einen Kreisbogen und von F' aus mit $2a$ einen zweiten, welche sich in N schneiden. Zieht man $F'N$, so schneidet die Verlängerung dieser Linie die Hyperbel im Berührungspunkte.

Der zweite Durchschnittspunkt der Kreise bestimmt auch eine zweite Tangente.

§. 55. Asymptoten bei der Hyperbel.

Setzen wir in die Gleichung

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{b^2 x'}{a^2 y'},$$

den Werth für y' aus der Gleichung der Hyperbel ein, d. i.

$$y' = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x'^2 - a^2},$$

so erhalten wir $tg \tau = \pm \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2}{x'^2}}}$.

Wir ersehen hieraus, dass mit wachsendem x' der Werth sich dem Quotienten $tg \tau = \pm \frac{b}{a}$

immer mehr nähert und in diesen übergeht, wenn $x = \pm \infty$ gesetzt wird. Die Linie, deren Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

ist, lässt sich also ansehen als die an einen in der Unendlichkeit liegenden Punkt der Hyperbel gezogene Tangente. Es ist also eine Linie, welcher sich die Hyperbel immer mehr anschmiegt, ohne sie jedoch je zu erreichen.

Eine gerade (oder krumme) Linie, welcher sich eine Curve immer mehr und mehr nähert, ohne sie jedoch je zu erreichen, nennt man eine Asymptote der Curve. Hiernach hat die Hyperbel zwei Asymptoten (Fig. 33.), deren Lage durch die Gleichung

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

bestimmt wird. Bei der gleichseitigen Hyperbel schliessen die Asymptoten beiderseits Winkel von 45° mit der Abscissenaxe ein, stehen also aufeinander senkrecht.

Dass sich die Hyperbel den Asymptoten ohne Aufhören nähert, lässt sich auch aus der Gleichung der Hyperbel selbst erkennen. Man hat nämlich

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

schreibt man diese Gleichung in der Form

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

und entwickelt $\left(1 - \frac{a^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Lehrsatz, so erhält man

$$y = \pm \frac{b}{a} x \left(1 - \frac{a^2}{2x^2} - \frac{a^4}{8x^4} - \dots \right).$$

Bezeichnet nun $Y = \pm \frac{b}{a} x$

die Gleichung der Asymptoten, so ist für dieselben Werthe von x

$$Y - y = \pm \frac{b}{a} \left(\frac{a^2}{2x} + \frac{a^4}{8x^3} + \dots \right),$$

welcher Werth sich für wachsende x immer mehr und mehr der Null nähert.

§. 56. Gleichung der Hyperbel bezogen auf ihre Asymptoten.

Sind NO , no (Fig. 33.) die Asymptoten der Hyperbel und M ein Punkt der letzteren, so ist, wenn wir dessen Coordinaten in Bezug auf die Asymptoten

$$AQ = \xi, MQ = \eta$$

setzen, weil MQN ein gleichschenkliges Dreieck ist,

$$QN = MQ = \eta,$$

$$AN = AQ + QN = \xi + \eta,$$

$$AP = x = (\xi + \eta) \cos \alpha \dots (1),$$

$$MP = y = (\xi + \eta) \sin \alpha - 2\eta \sin \alpha$$

$$\text{oder } y = (\xi - \eta) \sin \alpha \dots (2).$$

Substituiren wir die Werthe (1) und (2) in die Axengleichung der Hyperbel $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$,

so erhalten wir

$$a^2 (\xi - \eta)^2 \sin^2 \alpha - b^2 (\xi + \eta)^2 \cos^2 \alpha = -a^2 b^2,$$

welche Gleichung nach gehöriger Reduktion und mit Berücksichtigung, dass $\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$ ist, übergeht in

$$\xi \eta = \frac{1}{4} (a^2 + b^2)$$

oder wenn man

$$\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} = m$$

setzt, in

$$\xi \eta = m^2.$$

Für die gleichseitige Hyperbel erhält man

$$\xi \eta = \frac{1}{2} a^2.$$

Achstes Kapitel.

Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades mit zwei Variablen.

§. 57. Die Natur der durch eine quadratische Gleichung zwischen x und y ausgedrückten Curven.

Es sei die allgemeine Form einer solchen Gleichung, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem,

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0 \dots (1),$$

wo der Coefficient von y nöthigenfalls durch Division als beseitigt zu betrachten ist. Wir wollen zunächst versuchen, die Gleichung durch Coordinatenverwandlung in Bezug auf y in eine reine zu verwandeln, d. h. wir wollen die ausgedrückte Curve auf ein System beziehen, dessen Abscissenaxe dieselbe in zwei symmetrische Hälften theilt. Zu diesem Behufe bezeichnen wir die Coordinaten des neuen Anfangspunkts mit m und n und den Winkel, welchen die neue Abscissenaxe mit der ursprünglichen macht, mit α , so ist, wenn ξ , η die Coordinaten für's neue System bezeichnen (§. 5.)

$$x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + m,$$

$$y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + n.$$

Substituiren wir diese Werthe in (1), so erhalten wir

$$\begin{aligned} & (\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + n)^2 + a(\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + m)(\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + n) \\ & + b(\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + m)^2 + c(\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha + n) \\ & + d(\xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha + m) + e = 0 \end{aligned}$$

oder nach gehöriger Entwicklung

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha + b \sin^2 \alpha) \eta^2 \\ & + (\sin^2 \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha) \xi^2 \\ & + \left\{ (2n + am + c) \sin \alpha + (2bm + rn + d) \cos \alpha \right\} \xi \\ & + \left\{ (1 - b) \sin 2\alpha + a \cos 2\alpha \right\} \xi \eta \\ & + \left\{ (2n + am + c) \cos \alpha - (2bm + an + d) \sin \alpha \right\} \eta \\ & + (a^2 + amn + bm^2 + cn + dm + e) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & (\cos^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha + b \sin^2 \alpha) \eta^2 \\ & + (\sin^2 \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha) \xi^2 \\ & + \left\{ (2n + am + c) \sin \alpha + (2bm + rn + d) \cos \alpha \right\} \xi \\ & + \left\{ (1 - b) \sin 2\alpha + a \cos 2\alpha \right\} \xi \eta \\ & + \left\{ (2n + am + c) \cos \alpha - (2bm + an + d) \sin \alpha \right\} \eta \\ & + (a^2 + amn + bm^2 + cn + dm + e) \end{aligned}} \right\} = 0 \dots (2).$$

Die Grössen m, n, α können nun offenbar so bestimmt werden, dass die drei letzten Glieder der Gleichung (2) verschwinden. Setzen wir nämlich

$$\left. \begin{aligned} (1-b)\sin 2\alpha + a\cos 2\alpha &= 0 \\ (2n+am+c)\cos \alpha - (2bm+an+d)\sin \alpha &= 0 \\ n^2 + amn + bm^2 + cn + dm + e &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

und lösen die Gleichungen in Bezug auf m, n, α , so erhalten wir die fraglichen Werthe. Die Gleichung (2) geht sodann über in

$$\left. \begin{aligned} (\cos^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha + b \sin^2 \alpha) \eta^2 \\ + (\sin^2 \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha) \xi^2 \\ + \{(2n+am+c)\sin \alpha + (2bm+an+d)\cos \alpha\} \xi \end{aligned} \right\} = 0 \dots (4)$$

oder

$$\eta^2 + \frac{\sin^2 \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha + b \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha + b \sin^2 \alpha} \cdot \xi^2 + \frac{(2n+am+c)\sin \alpha + (2bm+an+d)\cos \alpha}{\cos^2 \alpha - a \sin \alpha \cos \alpha + b \sin^2 \alpha} \cdot \xi = 0 \dots (5);$$

oder wenn wir die Coefficienten von ξ^2 und ξ bezüglich mit f und g bezeichnen:

$$\eta^2 + f \cdot \xi^2 + g \cdot \xi = 0 \dots (6),$$

wo in f und g diejenigen Werthe von m, n, α zu setzen sind, welche aus (3) hervorgehen.

Durch die Gleichung (6) wird offenbar ganz dieselbe Curve ausgedrückt, welche die Gleichung (1) darstellt. Wir überzeugen uns leicht, dass der Charakter dieser Curve lediglich von der Beschaffenheit des Coefficienten f abhängt.

1) Für $f=0$ geht die Gleichung über in

$$\eta^2 = -g\xi \dots (7),$$

welches offenbar die Gleichung einer Parabel darstellt, deren Parameter g ist. Auf das Vorzeichen von g kommt es hierbei nicht an, da

$$\eta^2 = g \cdot (-\xi)$$

nur ausdrücken würde, dass die Curve auf der negativen Seite der Ordinatenaxe läge.

2) Ist f positiv, so stellt die Gleichung (6) die Scheitellgleichung einer Ellipse dar (§. 28.), das Vorzeichen von g mag positiv oder negativ sein. Für $f=1$ geht die Gleichung in die des Kreises über.

3) Ist f negativ, so geht Gleichung (6) über in
 $\eta^2 - f\xi^2 + g\xi = 0$,
 d. i. die Scheitelfgleichung einer Hyperbel (§. 36. N.).

Ausser den erwähnten könnten noch die Fälle eintreten, dass durch die Coordinatenverwandlung

$$f\xi^2 + g\xi = 0$$

$$\text{oder } \eta^2 + f\xi^2 = 0$$

$$\text{oder } \eta^2 = 0$$

würde. In diesen drückt Gleichung (6) und also auch (1) gar keine Curve mehr aus, sondern entweder einen Punkt, eine oder zwei Gerade oder auch gar nichts. Es folgt hieraus, dass Gleichung (1) oder die allgemeine Gleichung des zweiten Grades für x und y nur die Curven, Parabel, Ellipse, Kreis und Hyperbel ausdrücken kann.

§. 58. *Erkennung des Charakters der dargestellten Curve aus den Coefficienten der allgemeinen Gleichung.*

Wir haben vorher uns überzeugt, dass der Charakter der fraglichen Curve nur von der Beschaffenheit der Grösse f abhängt, Der Coefficient f wird aber nach (5) einzig und allein durch a , b und α ; α aber wieder nach der ersten Gleichung unter (4) nur durch a und b bestimmt. Es geht demnach hieraus hervor, dass der Charakter der Curve lediglich von der Beschaffenheit der Grössen a und b abhängig, hingegen von den Coefficienten c , d , e ganz unabhängig ist. Lösen wir die Gleichung

$$y^2 + axy + bx^2 + cy + dx + e = 0$$

in Bezug auf y auf, so erhalten wir

$$y = -\frac{1}{2}(ax + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - 4b)x^2 + 2(ac - 2d)x + (c^2 - 4e)},$$

oder wenn wir

$$a^2 - 4b = A,$$

$$2(ac - 2d) = B,$$

$$c^2 - 4e = C$$

setzen,

$$y = -\frac{1}{2}(ax + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{Ax^2 + Bx + C} \dots (8).$$

Der rationale Theil der Gleichung stellt eine gerade Linie dar, für welche

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{1}{2}a$$

ist. Punkte der durch die vollständige Gleichung ausgedrück-

ten Curve erhält man, wenn man die Ordinaten der Geraden um ein und dasselbe Stück vermehrt oder vermindert.

1) Ist nun A positiv, d. h. $a^2 > 4b$, so wird das Glied Ax^2 für wachsende x die Summe der beiden andern ($Bx + C$) einmal überschreiten, auch wenn B und C zugleich negativ sein sollten. Zu jedem, sowohl positiven als negativen x werden dann zwei gleiche aber entgegengesetzte reelle Wurzelwerthe gehören und es läuft deshalb die Curve bis ins Unendliche in vier Aesten fort, ist mithin eine Hyperbel.

Ist A positiv, und $B = C = 0$, so reducirt sich die Gleichung (8) auf

$$y = \frac{1}{2}(ax + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{A} \cdot x$$

und stellt zwei sich schneidende gerade Linien dar.

2) Ist $A = 0$ oder $a^2 = 4b$, so geben bei positivem B nur positive und bei negativem B nur negative Werthe von x gleiche, aber entgegengesetzte, reelle Wurzel ausdrücke, welche mit x bis ins Unendliche wachsen. In diesem Falle läuft also die Curve in zwei Aesten fort und ist mithin eine Parabel.

Für $A = B = 0$ und bei positivem C reducirt sich Gleichung (8) auf

$$y = -\frac{1}{2}(2x + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{C}$$

und drückt zwei gerade Linien aus, bei negativem C hingegen auf

$$y = +\frac{1}{2}(ax + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{-C}$$

und drückt gar nichts aus.

3) Ist A negativ, d. h. $a^2 < 4b$, so wird bei positivem C der Wurzelwerth nur reell bleiben, wenn x nicht über eine bestimmte Grenze hinaus wächst. Die Coordinaten müssen also zwischen bestimmten Grenzen bleiben, wenn eine Curve ausgedrückt werden soll, d. h. die Gleichung bestimmt in diesem Falle eine Ellipse.

Für $B = C = 0$ und bei negativem A geht die Gleichung über in

$$y = -\frac{1}{2}(ax + c) \pm \frac{1}{2}\sqrt{-A} \cdot x,$$

welche Gleichung nur einen Punkt bestimmt, dessen Coordinaten $x = 0$ und $y = -\frac{1}{2}c$ sind.

§. 59. *Rechtfertigung der Namen Hyperbel, Parabel, Ellipse.*

Die Scheitelgleichungen
 $y^2 = px + qx^2$ für die Hyperbel,
 $y^2 = px$ „ „ Parabel,
 $y^2 = px - px^2$ „ „ Ellipse
 rechtfertigen die Namen der Curven insofern, als die Ordinaten der Parabel (Vergleichungslinie) zwischen denen der Hyperbel und Ellipse stehen, so nämlich, dass die der Hyperbel die der Parabel überschreiten, den Ordinaten der Ellipse aber noch etwas an der Grösse der Parabelordinaten mangelt.

§. 60. *Ellipse, Parabel, Hyperbel sind Kegelschnitte.*

Es sei $ABCA'B'$ (Fig. 34.) ein gerader Doppelkegel, welcher Kreise $AB, A'B'$ zu Grundflächen hat, CD sei irgend eine schneidende Ebene; wir wollen die Gleichung der Curve suchen, welche aus dem Durchschnitte dieser schneidenden Ebene mit dem Mantel des Kegels entsteht. Wir legen zu diesem Ende durch die Axe OH des Kegels eine Ebene ACB senkrecht auf den Kegelschnitt, welche letzteren in der Geraden CD schneiden möge. Durch einen Punkt J dieser Geraden, welche wir die Axe des Kegelschnitts nennen wollen, lege man eine Schnittebene $EFG \perp ACB$, welche den Mantel des Kegels in einem Kreise (Stereom. §. 79.) schneidet. Ist G ein Durchschnitte beider Curven, so ist GJ sowohl auf CD als auch auf EF senkrecht (Stereom. §. 45.). Wir wollen $CJ = x$ und $GJ = y$ setzen und eine Relation zwischen diesen Coordinaten und den als constant anzunehmenden Werthen $AOB = \alpha$, $OCD = \beta$ und $OC = a$ suchen. Es ist nun im Kreise EFG

$$y^2 = GJ^2 = EJ \cdot FJ \dots (1).$$

Da $OFE = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ und also

$$\sin OFE = \cos \frac{1}{2}\alpha,$$

so haben wir im $\triangle CFJ$

$$FJ : x = \sin \beta : \cos \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{oder } FJ = \frac{x \sin \beta}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \dots (2);$$

ferner im $\triangle DEJ$

$$EJ : CD - x = \sin(\alpha + \beta) : \cos \frac{1}{2}\alpha$$

$$\text{oder } EJ = \frac{(CD - x) \sin(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \dots (3);$$

endlich im $\triangle CDO$

$$CD : a = \sin \alpha : \sin(\alpha + \beta)$$

$$\text{oder } CD = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \dots (4).$$

Setzen wir (4) in (3), so erhalten wir

$$EJ = \left(\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - x \right) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \dots (5)$$

und wenn wir endlich (5) und (2) in (1) setzen, so gelangen wir zu der Gleichung

$$y^2 = \left(\frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} - x \right) \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \cdot \frac{x \sin \beta}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \\ = \frac{\sin \beta}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \cdot \left\{ a \cdot x \sin \alpha - x^2 \sin(\alpha + \beta) \right\} \dots (6)$$

als Gleichung des Kegelschnitts. Die Vergleichung dieser Gleichung mit der in §. 58. (6) überzeugt uns sofort, dass Ellipse, Parabel und Hyperbel Kegelschnitte sind. Der Charakter der durch obige Gleichung ausgedrückten Curve hängt von der Beschaffenheit der Constanten ab.

a) Ist $\alpha + \beta < 180^\circ$, so bleiben die Vorzeichen in Gleichung (6) stehen und die Curve ist deshalb eine Ellipse.

b) Ist $\alpha + \beta = 180$, d. h. ist die schneidende Ebene KLM der Seitenhöhe AO des Kegels parallel, so geht Gleichung (6)

$$\text{über in } y^2 = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \cdot x \\ = \frac{a \sin^2 \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \cdot x$$

oder $y^2 = 4a \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cdot x$, welches die Gleichung einer Parabel ist.

c) Ist endlich $\alpha + \beta > 180$, wo also die schneidende Ebene NPQ auch den Scheitelkegel in npq mit trifft, so geht die Gleichung

$$(6) \text{ über in } y^2 = \frac{\sin \beta}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} \left\{ ax \sin \alpha + x^2 \sin(\alpha + \beta) \right\},$$

welches die Scheitelgleichung einer Hyperbel ist.

Es ist nach dem Bisherigen leicht zu übersehen, was aus den verschiedenen Kegelschnitten wird, wenn die Schnittebene durch den Scheitel O gelegt, d. h. wenn $a=0$ gesetzt wird.

Neuntes Kapitel.

Diskussion einiger Curven höherer Grade mit Benutzung der Elemente der Differentialrechnung.

§. 61. Die Cissoide.

Es ist ein Kreis ABD (Fig. 35.) gegeben, darin ein Durchmesser AB und an einem seiner Endpunkte eine Tangente BC gezogen; AC sei ferner eine beliebige Sekante und $AE = DC$ abgetragen; es soll die Gleichung für den geometrischen Ort des Punktes E gefunden werden.

Wir setzen $AF = x$, $EF = y$, $AB = 2r$, so ist, wenn wir noch DG ziehen, auch $BG = x$, und

$$AF : AG = EF : DG$$

$$\text{oder } x : 2r - x = y : DG;$$

$$\text{aber } DG^2 = AG \cdot BG$$

$$= (2r - x)x,$$

$$\text{folglich } x^2 : (2r - x)^2 = y^2 : (2r - x)x$$

$$\therefore x^2 : 2r - x = y^2 : x,$$

$$\therefore y^2 = \frac{x^3}{2r - x},$$

welches die Gleichung der fraglichen Curve ist. Aus derselben folgt,

a) dass weil $y = \pm \sqrt{\frac{x^3}{2r - x}}$ ist, die Curve symmetrisch gegen die Abscissenaxe liegt;

b) dass die Curve durch den Anfangspunkt A geht;

c) dass, weil für negative Abscissen die Ordinaten imaginär werden, die Curve nur auf der einen Seite der Ordinatenaxe liegt;

d) dass x nicht grösser als $2r$ werden darf, die Curve also zwischen der Ordinatenaxe und der Tangente TT' liegt;

e) dass die Ordinaten mit den Abscissen bis ins Unendliche wachsen, die Curve also aus zweien bis ins Unendliche fortgehenden Zweigen besteht;

f) dass, weil $x = 2r$ die Ordinate $y = \pm \infty$ giebt, die Tangente TT' eine Asymptote der Curve ist;

g) dass, weil $x = r$ die Ordinate $y = \pm r$ giebt, die Halbkreise AHB und AJB in den Punkten H und J von der Curve halbtirt werden.

h) Differentiiren wir die Gleichung

$$y^2 = \frac{x^3}{2r - x}$$

so erhalten wir

$$2y \frac{dy}{dx} = \frac{3(2r - x)x^2 + x^3}{(2r - x)^2}$$

$$= \frac{6rx^2 - 2x^3}{(2r - x)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3rx^2 - x^3}{(2r - x)^2} \cdot \frac{1}{y}$$

$$= \frac{(3r - x)x^2}{(2r - x)^2} \cdot \frac{\sqrt{2r - x}}{x\sqrt{x}}$$

$$\text{oder } \frac{dy}{dx} = \frac{(3r - x)\sqrt{x}}{(2r - x)\sqrt{2r - x}}$$

i) Da für $x = 0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ wird, so folgt hieraus, dass die Curve von der Abscissenaxe berührt wird: und da für $x = 2r$

$$\frac{dy}{dx} = \infty$$

wird, so steht die zur Curve gehörige Asymptote auf der Abscissenaxe senkrecht. (Vergl. f.)

§. 62. Diskussion der Gleichung $y^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 - x^4 = 0$.

Lösen wir die Gleichung nach y auf, so erhalten wir

$$y = \pm \sqrt{48a^2 \pm \sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4}} \dots (A).$$

Es folgt hieraus, dass die Curve gegen beide Axen symmetrisch liegt.

Um zu untersuchen, ob und für welche Werthe von x die Ordinate y imaginär wird; so haben wir den Ausdruck unter dem zweiten Wurzelzeichen zu untersuchen. Wir setzen zu diesem Ende

$$x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4 = 0 \dots (B).$$

Lösen wir die Gleichung auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 x^2 &= 50a^2 \pm \sqrt{2500a^4 - 2304a^4} \\
 &= 50a^2 \pm 14a^2 \\
 &= \begin{cases} 64a^2, \\ 36a^2, \end{cases}
 \end{aligned}$$

mithin $x = \pm 8a$

und $x = \pm 6a$.

Wir können demnach der Gleichung (A) auch die Form geben

$$y = \pm \sqrt{48a^2 \pm \sqrt{(x-8a)(x+8a)(x-6a)(x+6a)}} \dots (C).$$

a) Es folgt hieraus, dass x über $8a$ hinaus bis ins Unendliche wachsen kann, y also für jeden Werth von x , welcher $> 8a$ ist, reell wird. Die Werthe von x zwischen $6a$ und $8a$ geben nothwendig imaginäre Werthe von y . Ist demnach $AB = 6a$ (Fig. 36.) und $AC = 8a$, so liegt zwischen den in B und C auf der Abscissenaxe errichteten Lothen kein Punkt der Curve. Ebenso ist es bei B' und C' . Für $x < 6a$ sind die Ordinaten wieder reell.

b) Setzen wir $x = 6a$, so erhalten wir aus (C)

$$y = \pm a\sqrt{48} = BD = Bd,$$

ebenso erhalten wir für $x = 8a$

$$y = \pm a\sqrt{48} = CE = Ce.$$

Ganz dieselben Werthe für y erhalten wir, wenn $x = -6a$ oder $x = -8a$ gesetzt wird, so dass also auch

$$\begin{aligned}
 y &= \pm a\sqrt{48} = B'D' = B'd' \\
 &= C'E' = C'e' \text{ ist.}
 \end{aligned}$$

c) Um die Durchschnittspunkte der Curve mit den Axen zu finden, setzen wir abwechselnd x und $y = 0$. Setzen wir zunächst $x = 0$, so geht die Gleichung der Curve über in

$$y^2(y^2 - 96a^2) = 0,$$

welcher durch $y = 0$ und $y = \pm a\sqrt{96}$ genügt wird. Die Curve geht demnach durch den Anfangspunkt und schneidet die Ordinatenaxe in F und F' so, dass $AF = AF' = a\sqrt{96}$ ist.

Setzen wir $y = 0$, so geht die Gleichung der Curve über in $x^2(x^2 - 100a^2) = 0$, welcher durch $x = 0$ und $x = \pm 10a$ genügt wird. Ausser im Anfangspunkt wird demnach die Abscissenaxe in G und G' so geschnitten, dass $AG = AG' = 10a$ ist.

Wächst in (A) x über $10a$ hinaus, so wird
 $\sqrt{x^4 - 100a^2x^2 + 2304a^4} > 48a^2$
 und giebt das Minuszeichen vor der zweiten Wurzel imaginäre
 Werthe von y . Von $x = \pm 10a$ ab haben die Ordinaten da-
 her nur zwei reelle Werthe.

d) Differentiiren wir die Gleichung der Curve, so erhal-
 ten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 50a^2x}{y^3 - 48a^2y} \dots (D)$$

Um zu untersuchen, welche Lage die im Anfangspunkte der
 Coordinaten an die Curve gezogenen Tangenten haben, haben
 wir in (D) $x = y = 0$ einzusetzen. Wir erhalten hierdurch das
 vieldeutige Symbol $\frac{0}{0}$ und haben deshalb (Algebr. Analysis §. 130.)
 Zähler und Nenner noch einmal in Bezug auf x zu differenti-
 ren. Wir erhalten hierdurch

$$\frac{3x^2 - 50a^2}{3y^2 \frac{dy}{dx} - 48a^2 \frac{dy}{dx}} = \frac{dy}{dx}$$

oder $\frac{3x^2 - 50a^2}{3y^2 - 48a^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$,

woraus man für $x = y = 0$ erhält

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{25}{24},$$

mithin $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{25}{24}} = \pm \frac{5}{2} \sqrt{\frac{1}{6}}$.

Es geht hieraus hervor, dass sich im Anfangspunkte zwei Tan-
 genten an die Curve ziehen lassen und zwar unter Winkeln,
 deren Tangenten bezüglich

$$\pm \frac{5}{2} \sqrt{\frac{1}{6}}$$

sind. Die Gleichung dieser Tangenten ist

$$y = \pm \frac{5}{2} \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot x.$$

d) Dem Werthe $x = 0$ entspricht auch noch $y = \pm a\sqrt{96}$.
 Setzen wir diese Werthe in (D) ein, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

Die Curve hat also in F und F' *Maxima* oder *Minima*. Um darüber vollständig ins Klare zu kommen, suchen wir den zweiten Differentialquotienten. Wir haben aus (D)

$$(y^3 - 48a^2y) \frac{dy}{dx} = x^3 - 50a^2x.$$

Differentiiren wir wieder, so erhalten wir

$$(y^3 - 48a^2y) \frac{d^2y}{dx^2} + (3y^2 - 48a^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 3x^2 - 50a^2.$$

Nun ist $\frac{dy}{dx} = 0$, folglich ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3x^2 - 50a^2}{y^3 - 48a^2y}.$$

Setzen wir hier $x = 0$ und $y = +a\sqrt{96}$, so wird

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ negativ,}$$

für $x = 0$ und $y = -a\sqrt{96}$ wird dagegen

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ positiv.}$$

Die Curve hat somit in F ein Maximum, in F' dagegen ein Minimum und kehrt folglich der Abscissenaxe die concave Seite zu.

Auf die Untersuchung der weiteren Eigenschaften der Curve müssen wir hier verzichten.

§. 63. Die Fuss'sche Ellipse und zwei geometrische Oerter bei derselben.

I. Verallgemeinerung der Fuss'schen Ellipse.

a) Wenn man die Abscissen eines Kreises, dessen Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2$$

ist, um das n -fache der zugehörigen Ordinaten vermehrt, so ist

$$(\xi - n\eta)^2 + \eta^2 = r^2$$

die Gleichung derjenigen Curve, welche die Ordinaten des Kreises zu Ordinaten und die Summen der Abscissen und n -fachen Ordinaten zu Abscissen hat. Wir können obiger Gleichung auch die Form $\xi^2 + (n^2 + 1)\eta^2 - 2n\xi\eta = r^2 \dots (1)$ geben und ersehen hieraus, dass die fragliche Curve eine Ellipse ist.

Für $\eta=0$ bekommen wir $\xi=\pm r$, woraus hervorgeht, dass unsere Ellipse in denselben Punkten A und B (Fig. 37.) von der Abscissenaxe geschnitten wird, in welchen letztere den Kreis schneidet. Für die anderen Durchschnittspunkte beider Curven bekommen wir

$$\xi = \pm \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}}, \quad \eta = \pm \frac{2r}{\sqrt{n^2 + 4}}.$$

b) Um die Gleichung der Ellipse auf ihre Axen zu beziehen, haben wir, da ihr Mittelpunkt, wie aus der Form der Gleichung zu ersehen ist, ebenso wie der Mittelpunkt des Kreises im Anfangspunkte der Coordinaten C liegt,

$$\begin{aligned} \xi &= x \cos \alpha - y \sin \alpha, \\ \eta &= x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{aligned}$$

in die Gleichung der Ellipse zu substituiren. Wir bekommen hierdurch

$$\begin{aligned} &x^2 (\cos^2 \alpha + (n^2 + 1) \sin^2 \alpha - 2n \sin \alpha \cos \alpha) \\ &+ y^2 (\sin^2 \alpha + (n^2 + 1) \cos^2 \alpha + 2n \sin \alpha \cos \alpha) \\ &- 2xy (\sin \alpha \cos \alpha - (n^2 + 1) \sin \alpha \cos \alpha - n \sin^2 \alpha + n \cos^2 \alpha) \\ &= r^2 \dots (2). \end{aligned}$$

Setzen wir den Coefficienten von xy

$$\sin \alpha \cos \alpha - (n^2 + 1) \sin \alpha \cos \alpha - n \sin^2 \alpha + n \cos^2 \alpha = 0,$$

so bekommen wir nach gehöriger Entwicklung

$$n \cos 2\alpha - \frac{1}{2} n^2 \sin 2\alpha = 0,$$

woraus sich ergibt,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2}{n},$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{n^2 + 4}},$$

$$\cos 2\alpha = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (\sqrt{n^2 + 4} - n) \dots (3),$$

wo α der Winkel ist, welchen die Hauptaxe der Ellipse mit der alten Abscissenaxe macht.

Die Gleichung (2) geht nun, wenn wir das dritte Glied verschwinden lassen und $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$,

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$$

substituiren, in folgende über:

$$\begin{aligned}
 & x^2 \left(\frac{n^2 + 2}{2} + \frac{n^2}{2} \cos 2\alpha - n \sin 2\alpha \right) \\
 & + y^2 \left(\frac{n^2 + 2}{2} + \frac{n^2}{2} \cos 2\alpha + n \sin 2\alpha \right) \\
 & = r^2.
 \end{aligned}$$

Setzen wir für $\sin 2\alpha$ und $\cos 2\alpha$ die obigen Werthe ein, so haben wir endlich

$$x^2(n^2 + 2 - n\sqrt{n^2 + 4}) + y^2(n^2 + 2 + n\sqrt{n^2 + 4}) = 2r^2.$$

Multiplizieren wir die ganze Gleichung mit 2 und setzen, da

$$2(n^2 + 2 - n\sqrt{n^2 + 4}) = (n - \sqrt{n^2 + 4})^2,$$

$$2(n^2 + 2 + n\sqrt{n^2 + 4}) = (n + \sqrt{n^2 + 4})^2$$

ist, letztere Werthe ein, so erhalten wir die einfache Gleichung

$$(n - \sqrt{n^2 + 4})^2 x^2 + (n + \sqrt{n^2 + 4})^2 y^2 = 4r^2 \dots (4)$$

als Gleichung unserer Ellipse, bezogen auf die Axen der letzteren.

Bezeichnen wie früher a und b die Halbaxen der Ellipse, so ergibt sich aus (4)

$$a = \frac{2r}{n - \sqrt{n^2 + 4}},$$

$$b = \frac{2r}{n + \sqrt{n^2 + 4}}.$$

Für $n = 0$ werden die beiden Axen gleich, weil dann die Ellipse in den Erzeugungskreis übergeht. Für ein negatives n wird nach dem absoluten Werthe $a < b$, folglich ist dann a die halbe Nebenaxe und b die halbe Hauptaxe. Lassen wir n unbestimmt, so sind, wie durch Gleichung (4) unendliche viele Ellipsen, so durch $2a$ und $2b$ unendlich viele Axen ausgedrückt, die alle im Anfangspunkte der Coordinaten, so wie alle Ellipsen ihren Mittelpunkt haben.

Die Endpunkte dieser Axen werden nothwendig bestimmte Curven bilden, welche wir jetzt untersuchen wollen.

II. Geometrischer Ort der Axen-Endpunkte.

a) Beginnen wir mit der Hauptaxe, so haben wir für letztere die Gleichung

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x,$$

wo die Coordinaten auf das alte System bezogen sind. Setzen

wir den für $\tan \alpha$ unter (3) aufgestellten Werth ein, so bekommen wir

$$y = \frac{1}{2} (\sqrt{n^2 + 4} - n) x \quad \text{.. (5).}$$

Nehmen wir hierzu die auf das alte Axensystem bezogene Gleichung der Ellipse

$$x^2 + (n^2 + 1) y^2 - 2nxy = r^2$$

und eliminiren aus beiden das veränderliche n , so bekommen wir eine Gleichung, welche ausser x und y das constante r enthält und welches die Gleichung des fraglichen Orts ist. Aus der letzten Gleichung ergibt sich

$$n = \frac{x + \sqrt{r^2 - y^2}}{y}.$$

Setzen wir diesen Werth in (5) ein, so bekommen wir nach gehöriger Entwicklung

$$y^4 + x^2 y^2 = r^2 x^2 \quad \text{.. (6)}$$

als Gleichung für den geometrischen Ort des Endpunkts der Hauptaxe.

b) Suchen wir die Gleichung des geometrischen Orts des Endpunkts der Nebenaxe, so haben wir für letztere die Gleichung

$$y = -\cot \alpha \cdot x$$

$$\text{oder } y = \frac{2x}{n - \sqrt{n^2 + 4}}.$$

Substituiren wir in diese Gleichung den vorher gefundenen Werth für n , so bekommen wir wieder die Gleichung

$$y^4 + x^2 y^2 = r^2 x^2,$$

woraus hervorgeht, dass die beiden Oerter ganz zusammenfallen, was sich schon daraus schliessen liess, dass für negative Werthe von n die Hauptaxe in die Nebenaxe umschlägt.

c) Untersuchen wir die Curve näher, so ergibt sich unmittelbar, dass dieselbe durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht. Ausser in diesem Punkte trifft die Curve nie wieder mit den Axen zusammen.

d) Bestimmen wir y aus der Gleichung der Curve, so erhalten wir

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} \pm \sqrt{\frac{x^4}{4} + r^2 x^2}$$

$$\text{oder } y = \pm \sqrt{-\frac{x^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{x^4 + r^2 x^2}}.$$

Wir sehen hieraus, dass die Curve symmetrisch gegen die Axen liegt, gleichzeitig aber auch, dass das Minuszeichen vor der zweiten Wurzel keine reellen Werthe für y giebt und die Curve sich in vier Zweigen bis ins Unendliche erstreckt.

Bestimmen wir x aus der Gleichung, so haben wir

$$x \pm = \frac{y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

woraus hervorgeht, dass y nicht über r hinauswachsen kann und $y = \pm r$ die Abscisse $x = \pm \infty$ macht. Es folgt hieraus, dass die durch D und E mit der Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden Asymptoten an die Curve sind.

e) Für die Durchschnittspunkte der Curve mit dem Erzeugungskreise erhalten wir

$$x = y = \pm \frac{1}{2} r \sqrt{2},$$

woraus hervorgeht, dass die Kreisperipherie durch unsere Curve in vier gleiche Theile getheilt wird.

f) Suchen wir den ersten Differentialquotienten von y nach x , so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2 - y^2)}{y(2y^2 + x^2)} \dots (7).$$

Setzen wir den vorher gefundenen Werth für x

$$x = \frac{y^2}{\sqrt{r^2 - y^2}}$$

ein, so bekommen wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(r^2 - y^2) \sqrt{r^2 - y^2}}{y(2r^2 - y^2)} \dots (8).$$

Da $\frac{dy}{dx} = 0$ wird für $y = \pm r$, so folgt hieraus, dass diese Ordinaten, wie wir bereits aus andern Gründen erkannten, *Maxima* und *Minima* bezeichnen.

g) Setzen wir in (8) $y = 0$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \pm \infty.$$

Da $y = 0$ der Abscisse $x = 0$ ausschliesslich zugehört, so folgt hieraus, dass die Curve von der Ordinatenaxe im Anfangspunkte sowohl berührt als geschnitten wird.

III. Geometrischer Ort der Brennpunkte.

a) Um den geometrischen Ort der Brennpunkte zu finden, erinnern wir uns, dass wir für die Halbaxen unter I. b) gefunden hatten

$$a = \frac{2r}{n - \sqrt{n^2 + 4}} \text{ und}$$

$$b = \frac{2r}{n + \sqrt{n^2 + 4}}.$$

Bezeichnet nun e die halbe Excentricität, so haben wir

$$e^2 = \frac{4r^2}{(n - \sqrt{n^2 + 4})^2} - \frac{4r^2}{(n + \sqrt{n^2 + 4})^2}$$

$$= nr^2 \sqrt{n^2 + 4} = x^2 + y^2 \dots (8),$$

wo x und y auf das alte System bezogen ist. Nehmen wir dazu die Gleichung der Hauptaxe

$$y = \pm (\sqrt{n^2 + 4} - n)x,$$

und eliminiren aus beiden das veränderliche n , so erhalten wir die verlangte Gleichung. Die letzte Gleichung giebt

$$n = \frac{x^2 - y^2}{xy} \dots (10),$$

und wir erhalten, wenn wir (10) in (9) substituiren

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{xy} \cdot \sqrt{\frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 y^2} + 4},$$

welche nach gehöriger Entwicklung übergeht in die einfache Gleichung

$$x^2 y^2 + r^2 y^2 = r^2 x^2 \dots (11).$$

b) Aus der Beschaffenheit der Gleichung ersieht man sofort, dass sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht und symmetrisch gegen beide Axen liegt.

c) Da $x = \pm \frac{ry}{\sqrt{r^2 - y^2}}$ ist, kann y nicht über r hinaus wachsen. Die Curve hat also an der durch D und E mit der Abscissenaxe gezogenen Parallelen ebenfalls ihre Grenzen und erreicht diese, da $y = \pm r$ die Abscisse $x = \pm \infty$ giebt, erst in der Unendlichkeit, d. h. hat jene Parallelen ebenfalls zu Asymptoten.

d) Differentiiren wir die Gleichung $x^2 y^2 + r^2 y^2 = r^2 x^2$ nach x , so finden wir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(r^2 - y^2)}{y(r^2 + x^2)} \dots (12)$$

und wenn wir den obigen Werth für x substituiren,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{(r^2 - y^2)\sqrt{r^2 - y^2}}{r^2} \dots (13).$$

Für $y = \pm r$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$ und entsprechen also diesen Ordinaten *Maxima* und *Minima* der Curve (vergl. c).

e) Für $y = 0$ wird

$$\frac{dy}{dx} = \pm 1,$$

woraus hervorgeht, dass die an die Curve im Anfangspunkte gezogenen Tangenten zu beiden Seiten der Abscissenaxe mit diesen Winkel von 45° bilden.

Zehntes Kapitel.

Einige transcendente Curven.

§. 64. Die logarithmische Linie.

Mit diesem Namen bezeichnet man eine Curve, deren Abscissen die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten sind, welche also durch die Gleichung

$$x = \log y \dots (1)$$

$$\text{oder } g^x = y \dots (2)$$

ausgedrückt wird, wo g die Grundzahl des Logarithmensystems ist.

a) Da y für negative und positive Werthe von x immer positiv bleibt, so erstreckt sich die Curve nur auf einer Seite der Abscissenaxe bis ins Unendliche fort.

b) Für $x = 0$ wird $y = 1$, die Curve schneidet also von der Ordinatenaxe das Stück $AB = 1$ (Fig. 38.) ab. Für $x = 1$ dagegen wird $y = g$.

c) Nehmen wir $g > 1$ an, so wachsen die Ordinaten mit den Abscissen und die Curve entfernt sich bei wachsendem

positiven x immer mehr von der Abscissenaxe. Bei wachsendem negativen x wird y immer kleiner, nähert sich der Null und geht in diese für $x = -\infty$ über. Es folgt hieraus, dass die Abscissenaxe eine Asymptote an die Curve ist.

d) Wird $g < 1$ angenommen, so hat die Curve gegen die Ordinatenaxe die umgekehrte Lage.

e) Differentiiren wir die Gleichung (2), so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = g^x \cdot \log. \text{nat. } g \dots (3).$$

Da $\frac{dy}{dx} = 0$ wird für $x = -\infty$, so folgt auch hieraus, dass die Abscissenaxe Asymptote der Curve ist.

§. 65. Die Sinuslinie.

Man versteht hierunter diejenige Curve, deren Ordinaten die Sinusse der zugehörigen Abscissen sind und welche also durch die Gleichung

$$y = \sin x \dots (4)$$

ausgedrückt wird.

a) Da für $x = 0$ und $x = nr\pi$, wo n eine positive oder negative ganze Zahl ist, die Ordinaten zu Null werden, so gehören jene Abscissen $x = 0$, $x = \pm r\pi$, $\pm 2r\pi$, $\pm 4r\pi$ als zu eben so viel Durchschnittspunkten (A, B, B', C, C' etc.) der Curve mit der Abscissenaxe.

b) Die Ordinaten wachsen von $x = 0$ an, erreichen ihren grössten Werth, nämlich r , bei $x = \frac{1}{2}r\pi$ und nehmen dann wieder ab bis zu $y = 0$. Dasselbe findet beim weiteren Verlauf der Curve statt bei den negativen Ordinaten von $x = r\pi$ bis $\frac{3}{2}r\pi$, wo $y = -r$ wird. Die Ordinaten absolut genommen nehmen dann wieder ab bis $x = 2r\pi$ u. s. f. Ganz dasselbe findet für negative Werthe von n Statt.

c) Differentiiren wir die Gleichung, so erhalten wir

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \dots (5)$$

$$\text{und } \frac{dy^2}{dx^2} = -\sin x \dots (6).$$

Da $\frac{dy}{dx} = 0$ wird für $x = \frac{4n \pm 1}{2} \cdot r\pi$, so geht daraus hervor,

dass diesen Abscissen *Maxima* oder *Minima* entsprechen. Aus Gleichung (6) folgt ferner (Algebr. Analys. §. 138.),

$$\text{dass zu } x = \frac{4n+1}{2} \cdot r\pi \text{ } \textit{Maxima}$$

$$\text{und zu } x = \frac{4n-1}{2} \cdot r\pi \text{ } \textit{Minima}$$

gehören.

Anmerkung. Da $y = \cos x = \sin(\frac{1}{2}r\pi - x)$ ist, so wird durch $y = \cos x$ ganz dieselbe Curve, wie durch $y = \sin x$ ausgedrückt, nur dass die Ordinatenaxe um $\frac{1}{2}r\pi$ verrückt ist.

§. 66. Die Cycloide.

Man versteht darunter die Curve, welche beschrieben wird durch einen Punkt (*M* Fig. 40.) in der Peripherie eines Kreises, welcher auf einer geraden Linie rollt. Um die Gleichung dieser Curve zu finden, nehmen wir an, *M* habe sich beim Beginn der Kreisbewegung in *A* befunden, so ist, wenn wir *A* als Anfangspunkt der Coordinaten betrachten, $AQ = x$,

$$MQ = y = RB, MR^2 = (2r - y)y, AB = \text{arc } MB = r \cdot \text{arcsin. vers. } \frac{y}{r}$$

und wir haben somit

$$x = r \cdot \text{arcsin. vers. } \frac{y}{r} - \sqrt{2ry - y^2} \dots (1)$$

$$\text{oder } x = r \cdot \text{arc cos } \left(1 - \frac{y}{r} \right) - \sqrt{2ry - y^2} \dots (2)$$

$$\text{oder auch } \frac{r-y}{r} = \cos \frac{x + \sqrt{2ry - y^2}}{r} \dots (3)$$

als Gleichung der Curve.

Für $y = 0$ erhalten wir aus (3)

$$\cos \frac{x}{r} = 1,$$

welcher Gleichung $x = 0$, $x = 2r\pi$ und überhaupt $x = 2nr\pi$ entspricht, wo n eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Die Curve schneidet demnach die Abscissenaxe in unzähligen Durchschnittpunkten und zwar in den Distanzen 0, $2r\pi$, $4r\pi$, $6r\pi$, $8r\pi$ etc. vom Anfangspunkte.

Da der Wurzelausdruck

$$\sqrt{y(2r - y)}$$

nur für $y \leq r$ reelle Werthe giebt, so folgt daraus, dass die Curve über eine mit der Abscissenaxe im Abstände $2r$ gezogene Parallele nicht hinausgeht. Gleichzeitig ersieht man, dass y nicht negativ werden kann, die Curve aber nur auf der einen Seite der Abscissenaxe bleibt. Für $y = 2r$ geht die Gleichung

(3) über in $\cos \frac{x}{r} = 0$,

welcher die Werthe entsprechen

$$x = \frac{r\pi}{2} = \frac{4n+1}{2} \pi r,$$

wo n wieder eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Zur weiteren Untersuchung der Curve wollen wir uns eines Systems von zwei Gleichungen, durch welches die Curve ebenfalls dargestellt wird, bedienen. Setzen wir nämlich

$BCM = \varphi$, so haben wir

$$x = r(\varphi - \sin \varphi) \dots (4)$$

$$y = r(1 - \cos \varphi) \dots (5).$$

Differentiiren wir beide Gleichungen nach φ , so erhalten wir

$$\frac{dx}{d\varphi} = r(1 - \cos \varphi) = 2r(\sin \frac{1}{2} \varphi)^2$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r \sin \varphi = 2r \sin \frac{1}{2} \varphi \cos \frac{1}{2} \varphi,$$

mithin (Analysis §. 95.)

$$\frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \frac{dy}{dx} = \cot \frac{1}{2} \varphi$$

$$= \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}}.$$

$$\text{Nun ist } 1 - \cos \varphi = \frac{y}{r}$$

$$\text{und deshalb } 1 + \cos \varphi = \frac{2r - y}{r},$$

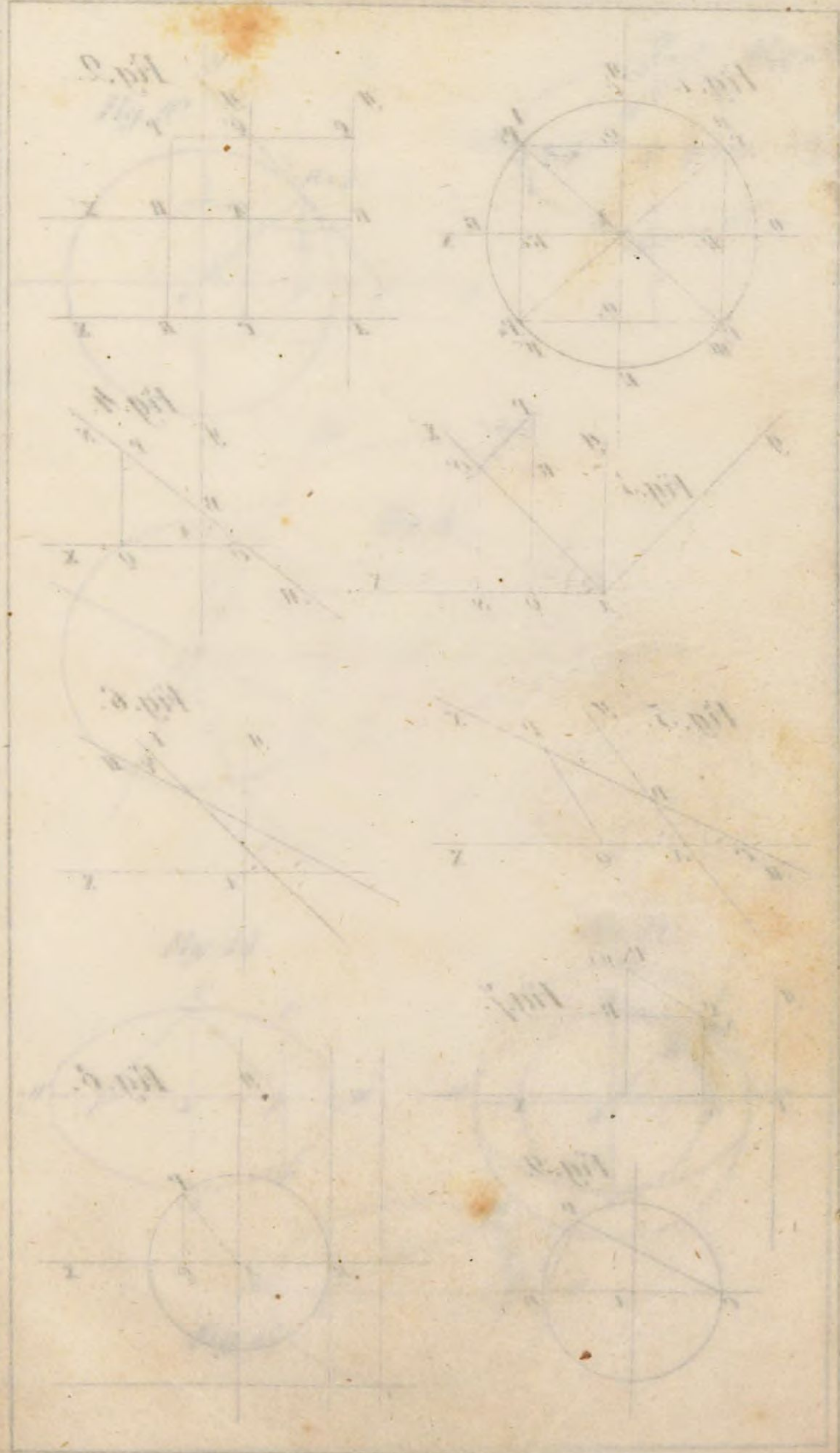
$$\text{folglich } \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2r - y}{y}}.$$

Für $y = 0$ wird $\frac{dy}{dx} = \infty$, folglich stehen die Tangenten, welche im Durchschnittspunkte der Curve mit der Abscissenaxe an

erstere gezogen werden, auf der letztern senkrecht. Für $y=2r$ wird $\frac{dy}{dx} = 0$,

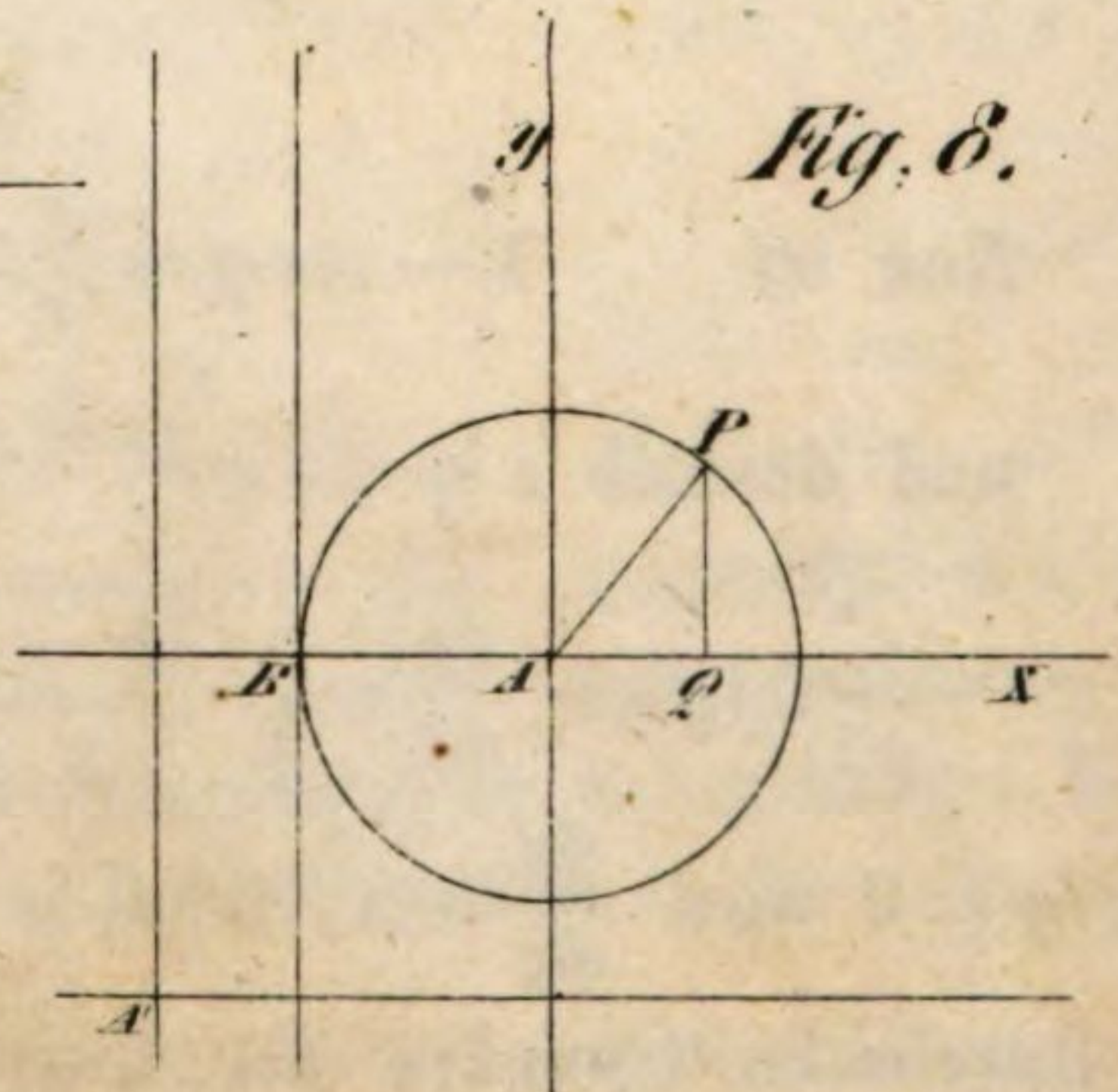
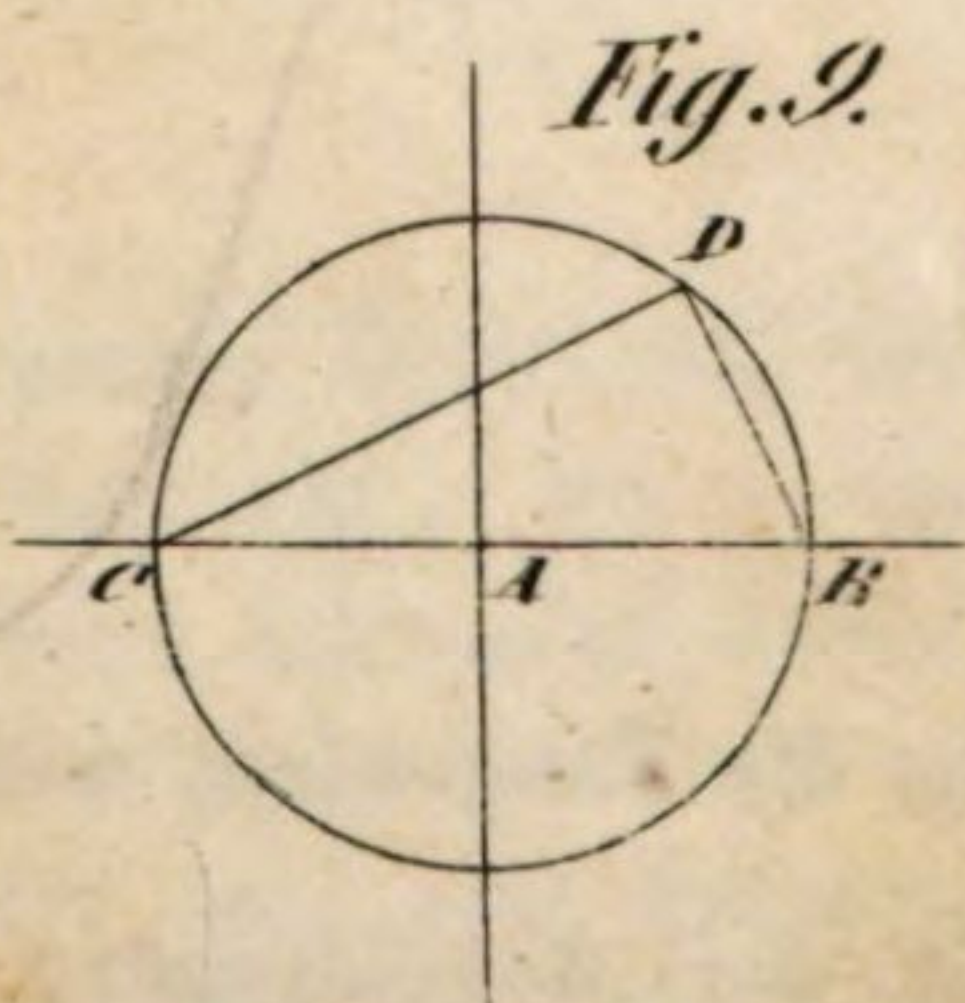
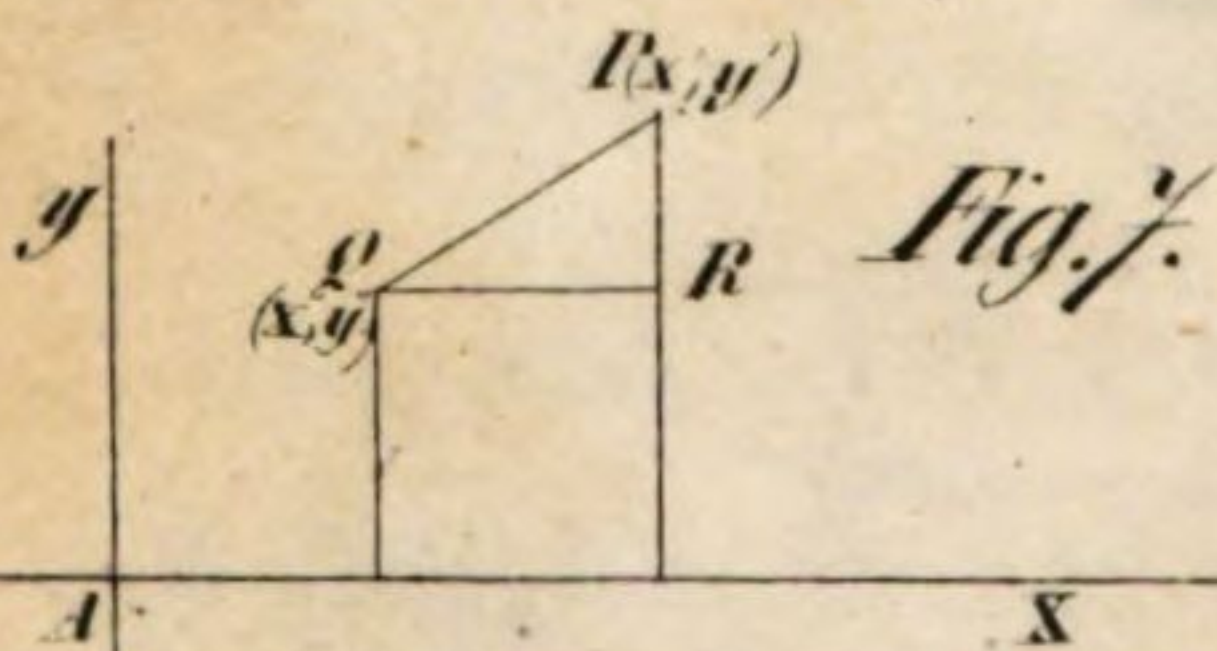
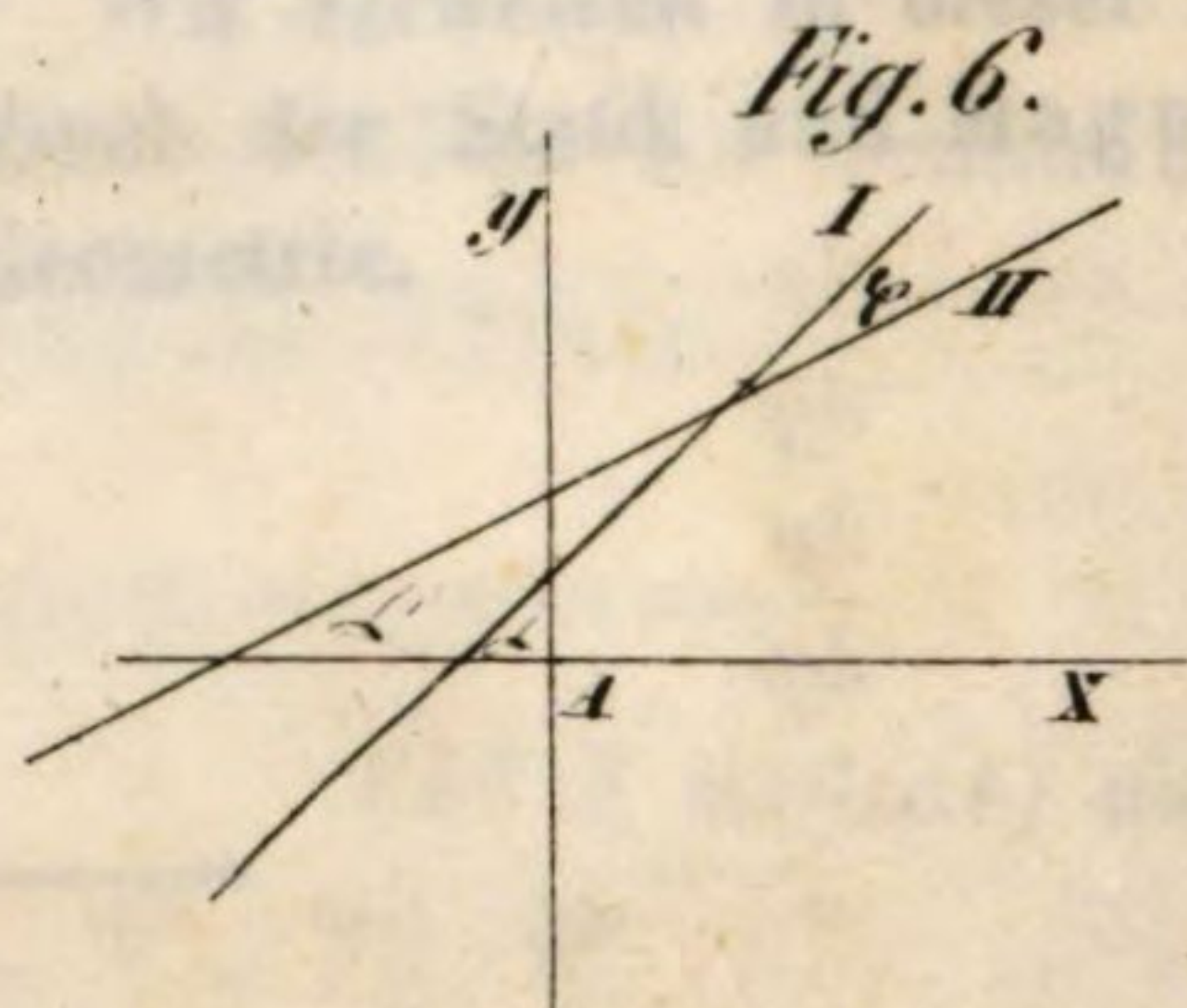
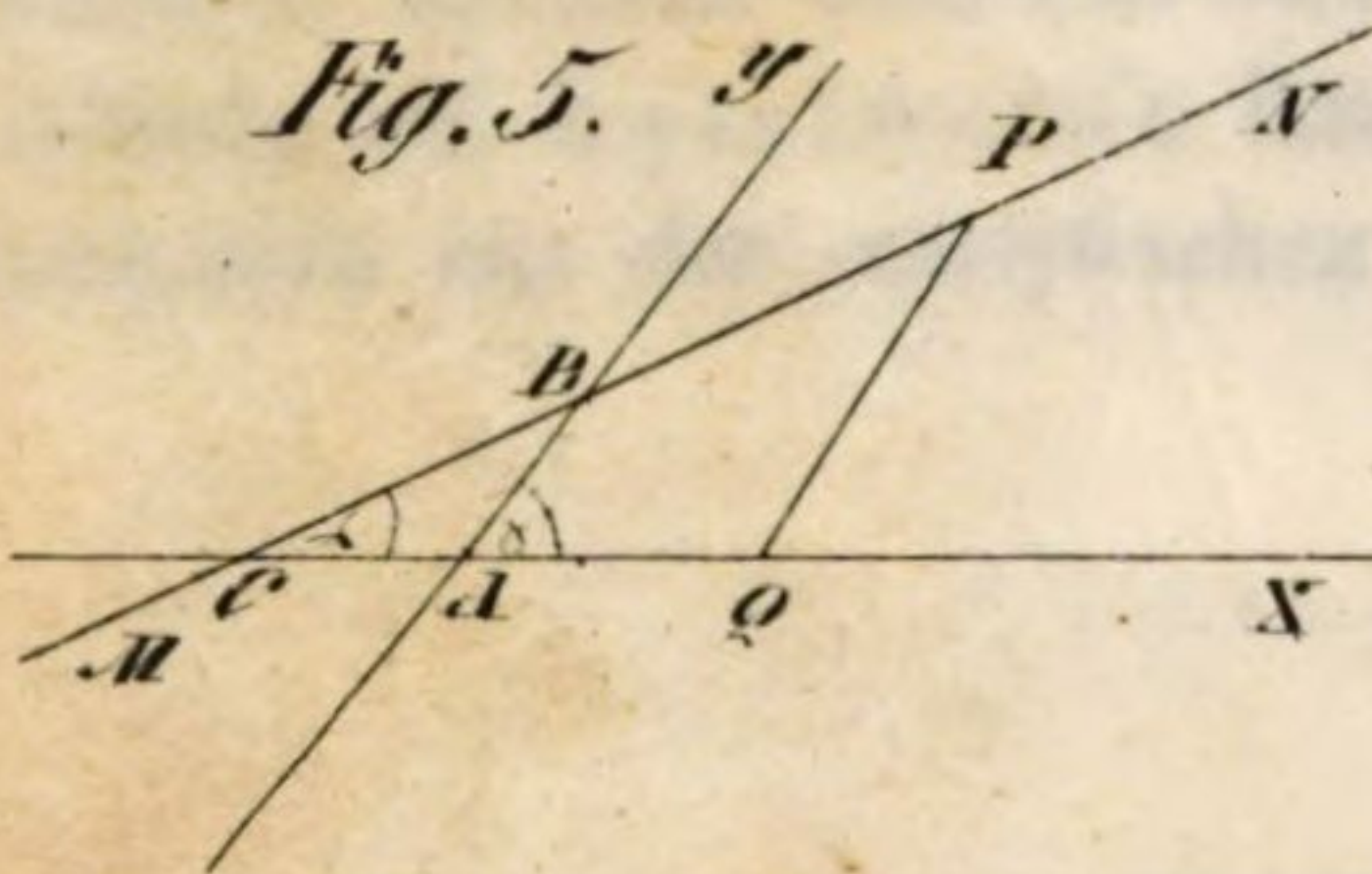
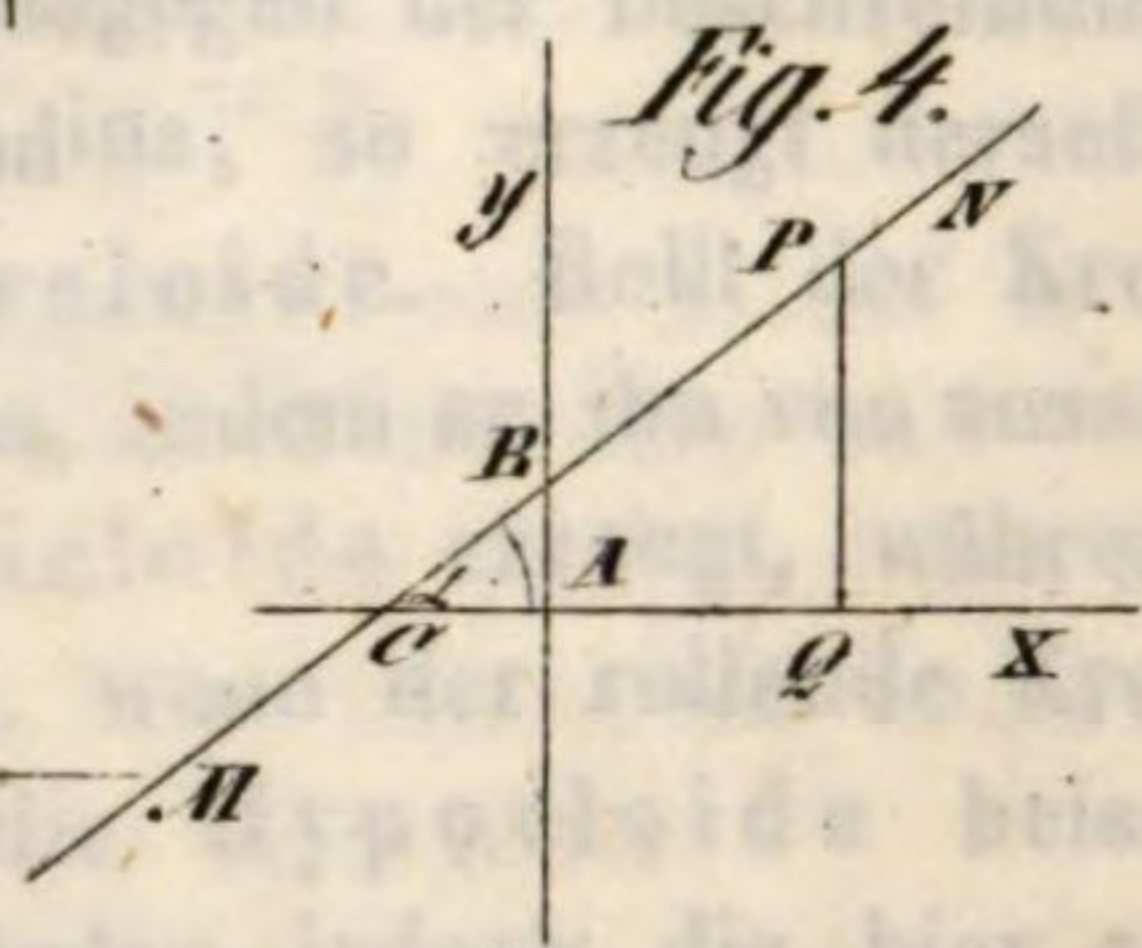
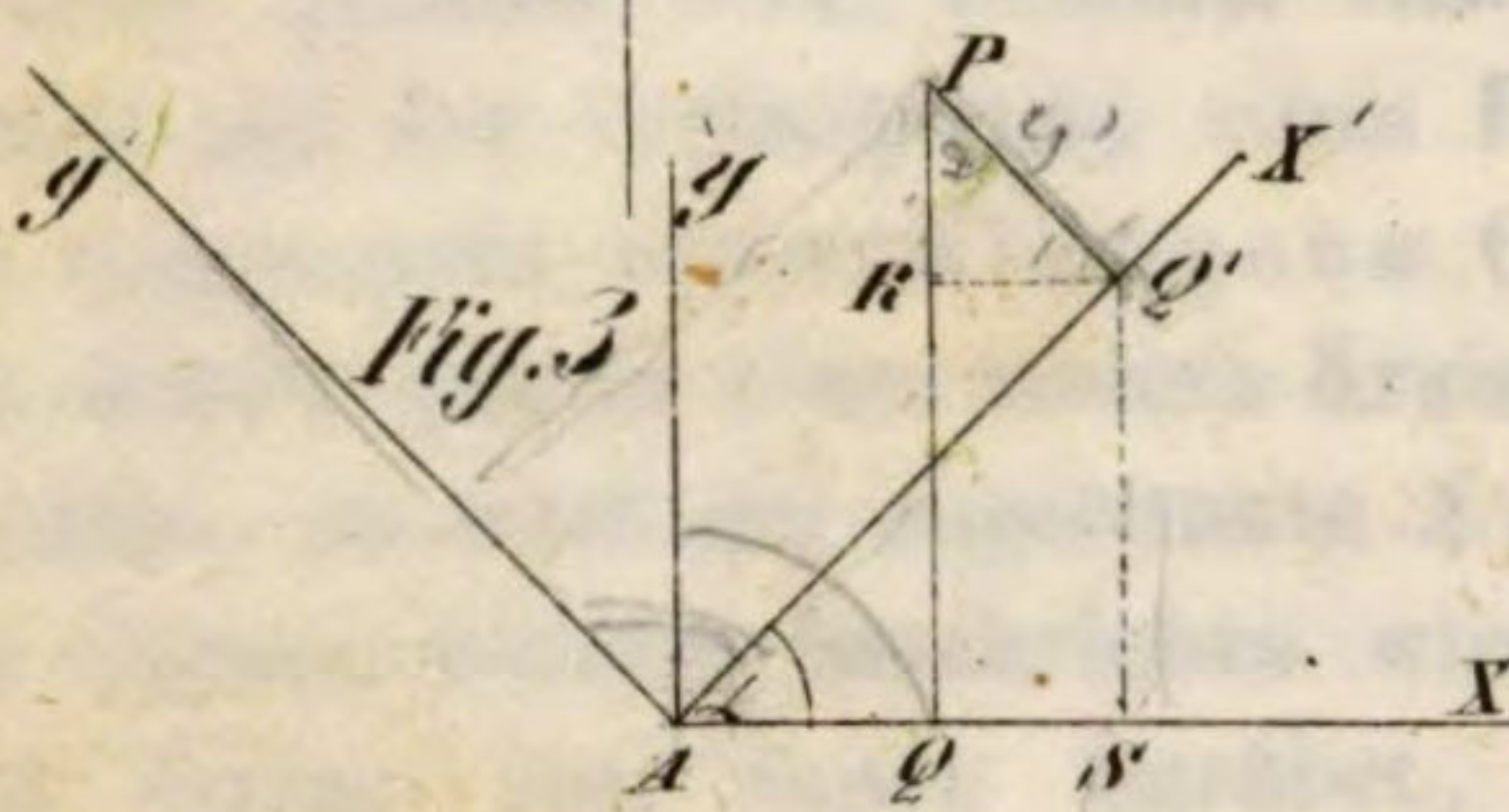
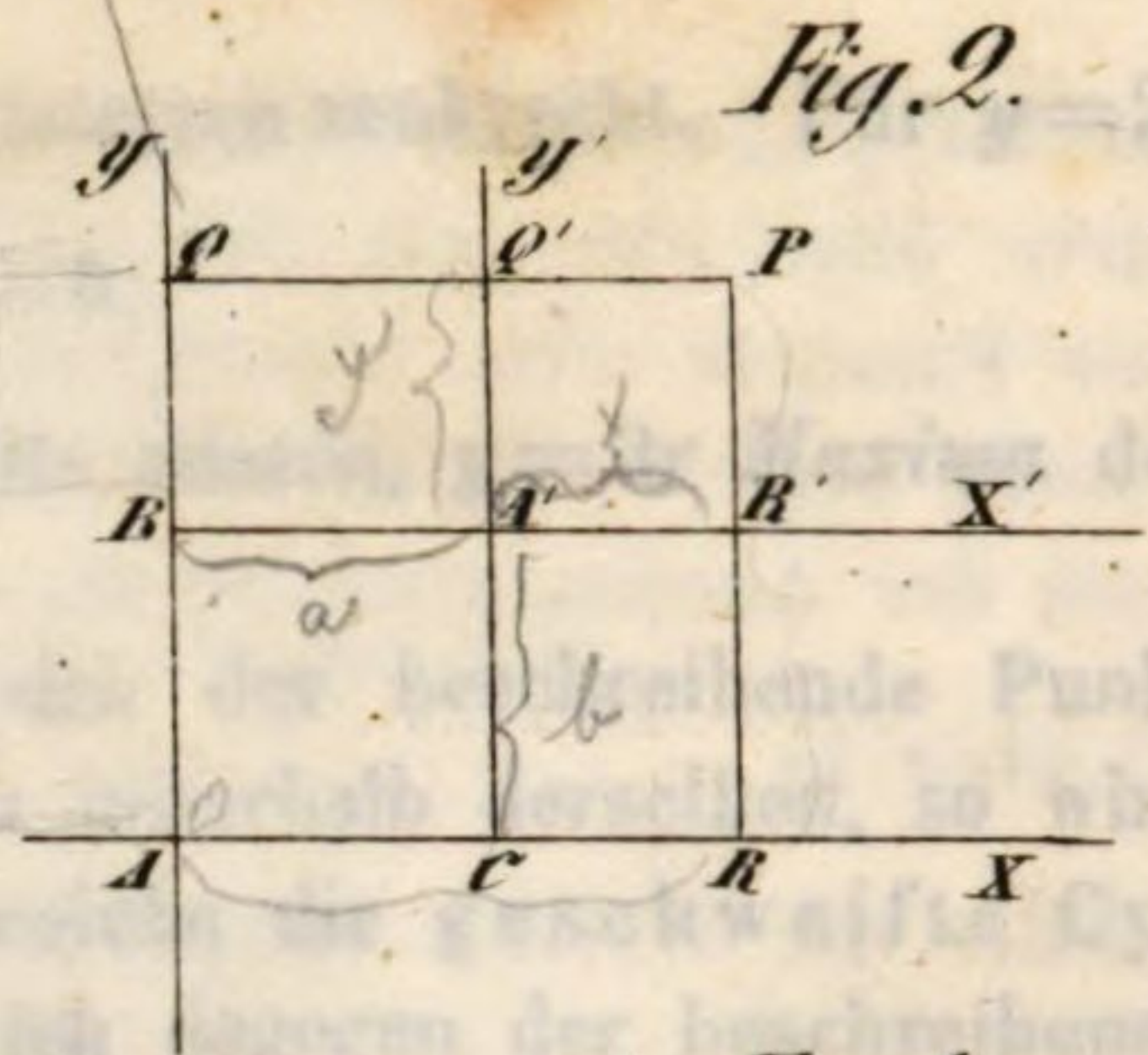
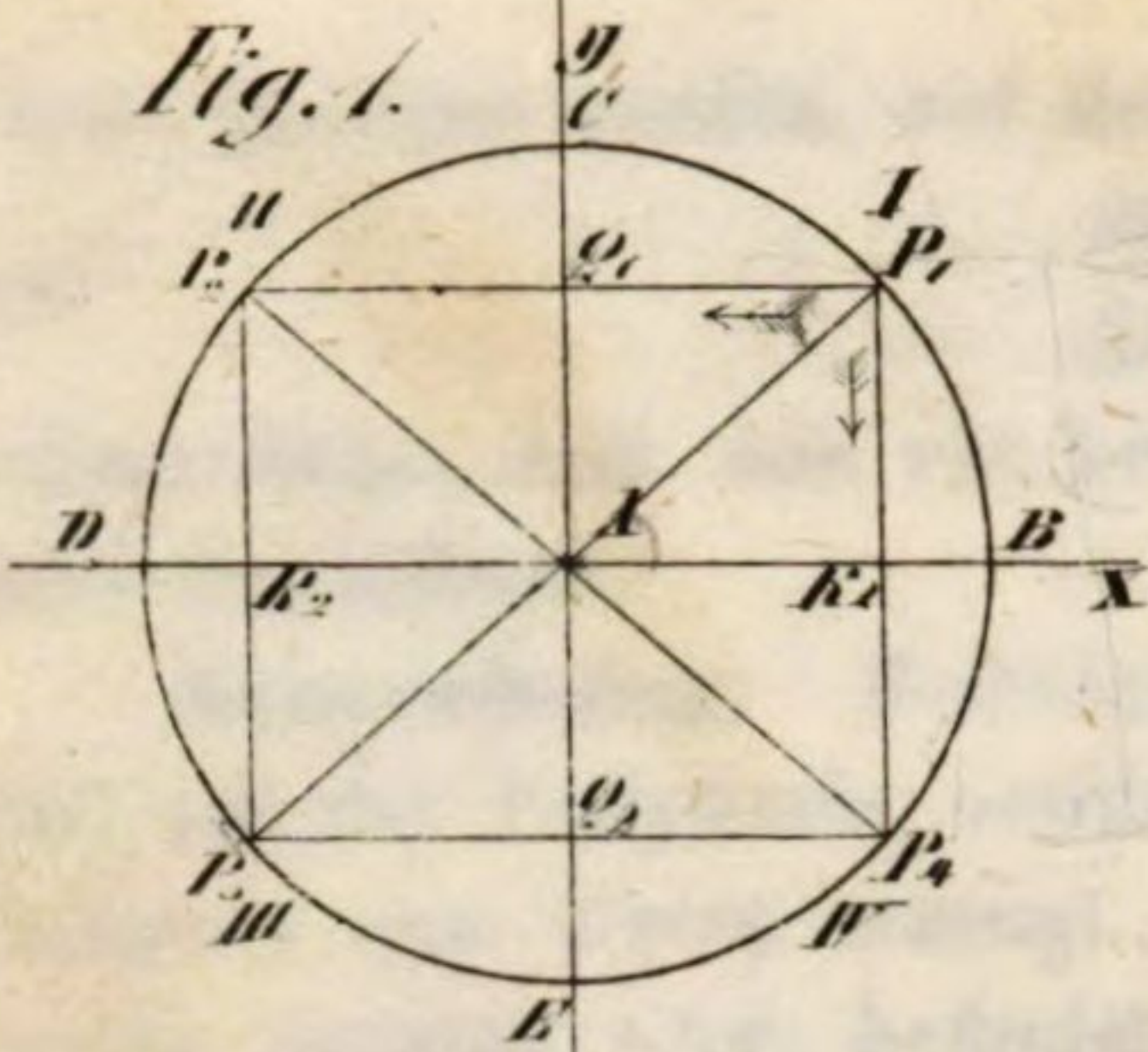
woraus folgt, dass, wie wir bereits wissen, $y=2r$ *Maxima* der Curve bezeichnet.

Anmerkung. Befindet sich der beschreibende Punkt nicht auf der Peripherie, sondern innerhalb derselben, so wird hierdurch eine Curve erzeugt, welche die geschweifte Cycloide genannt wird; befindet sich dagegen der beschreibende Punkt auf der Verlängerung eines Radius, so erzeugt derselbe die sogenannte verschlungene Cycloide. Rollet der Kreis auf der Peripherie eines andern Kreises, indem er ihn von aussen berührt, so wird die sogenannte Epicloide erzeugt, während die Curve, welche beschrieben wird, wenn der rollende Kreis den festen von innen berührt, die Hypocloide heisst. Die Untersuchung dieser Curven würden jedoch die hier gesteckten Grenzen überschreiten. Wir verweisen in dieser Beziehung auf Eytelwein's Handbuch der Statik und Magnus' Aufgaben aus der analytischen Geometrie.



Tafel I.

Wiegand, Analyt. Geom.



Tafel II.

Fig. 10.

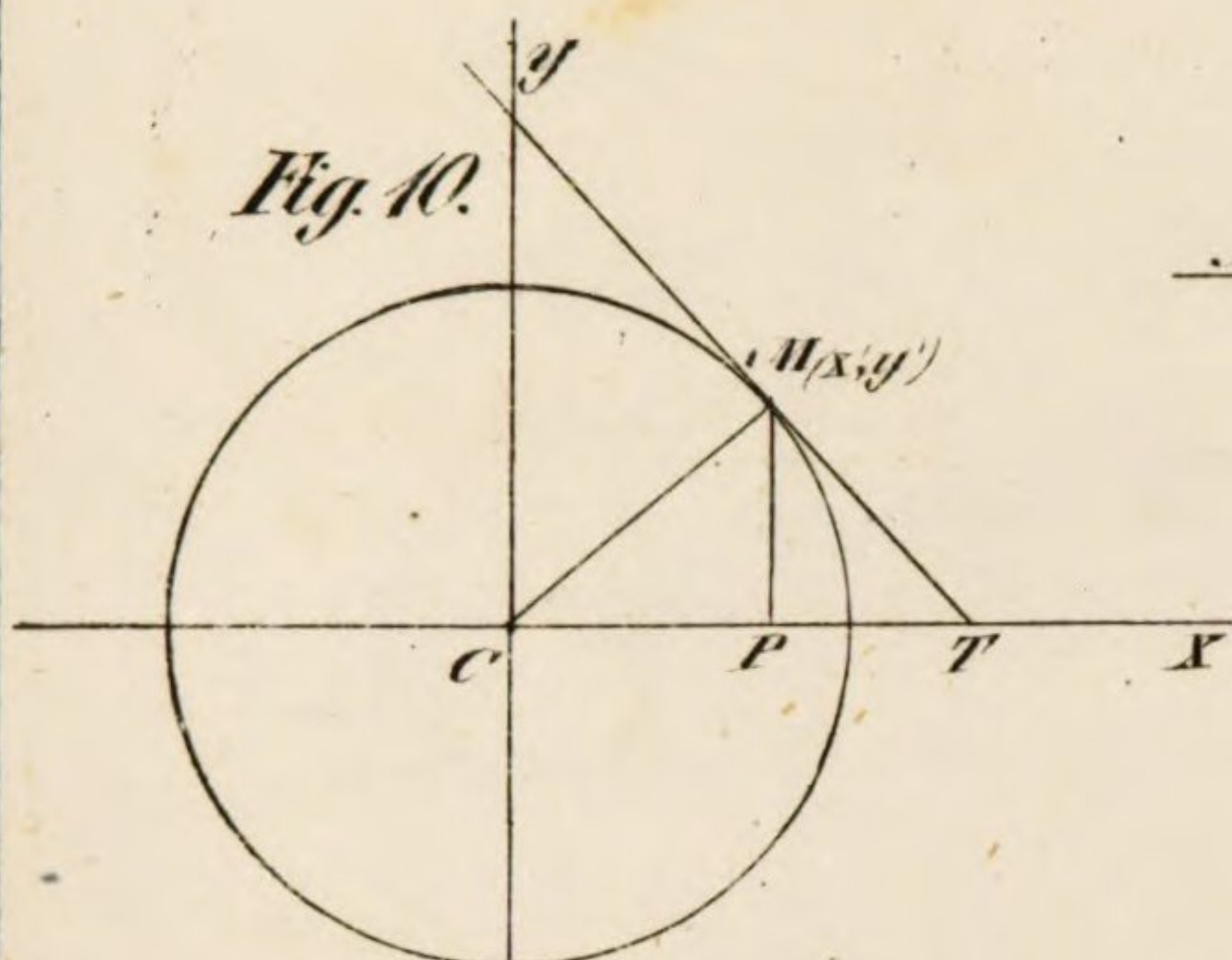


Fig. 12.

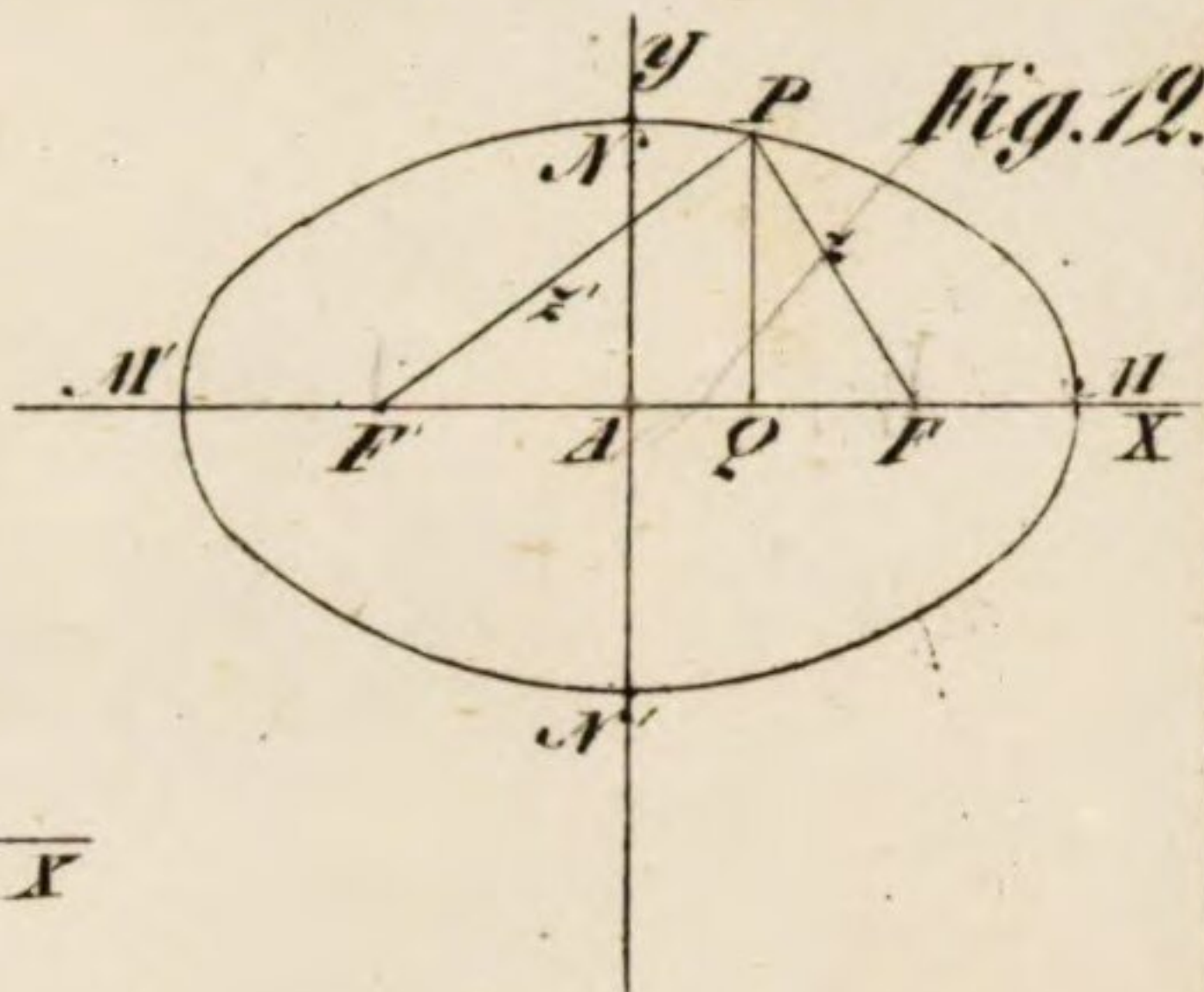


Fig. 11.

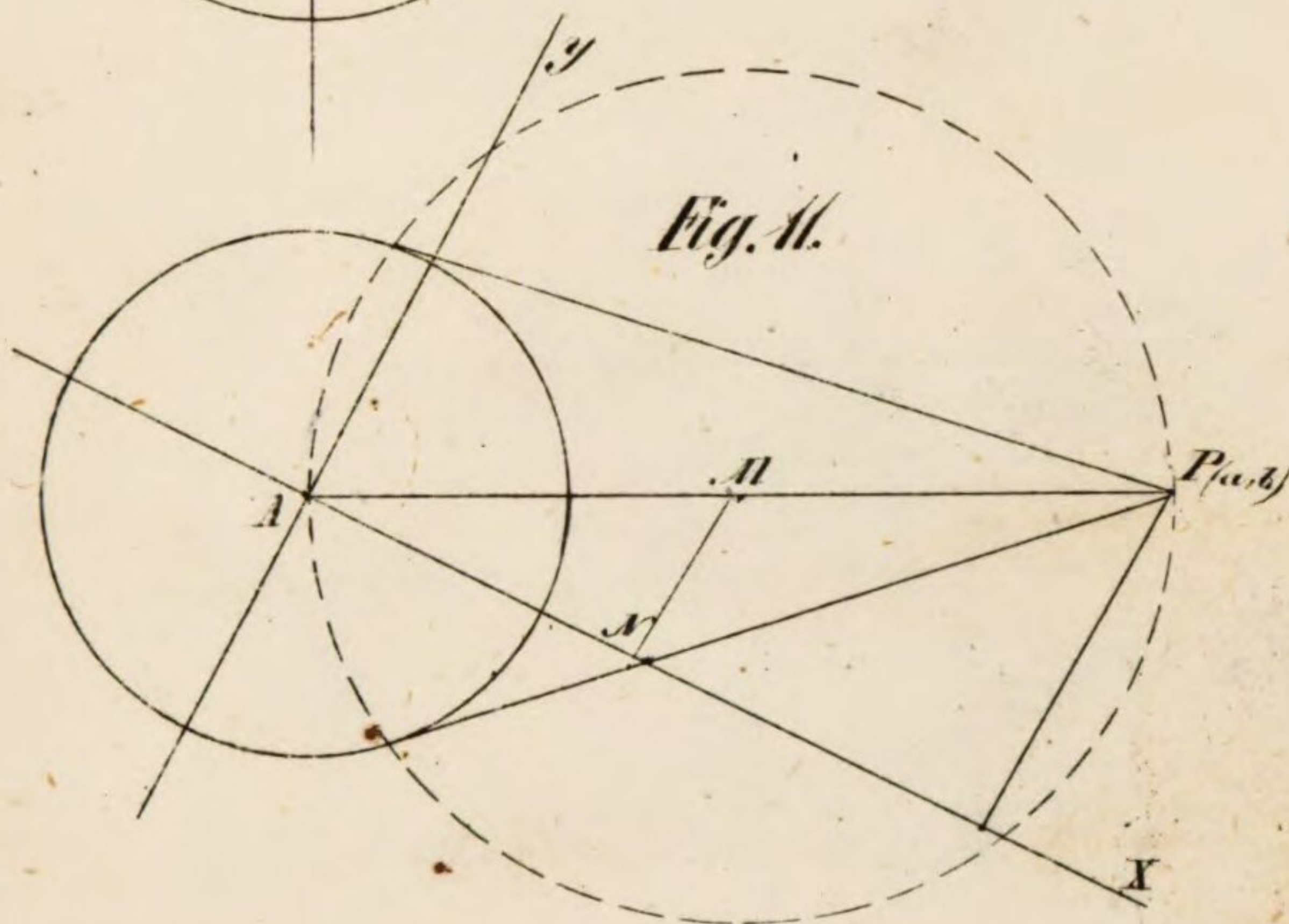


Fig. 13.

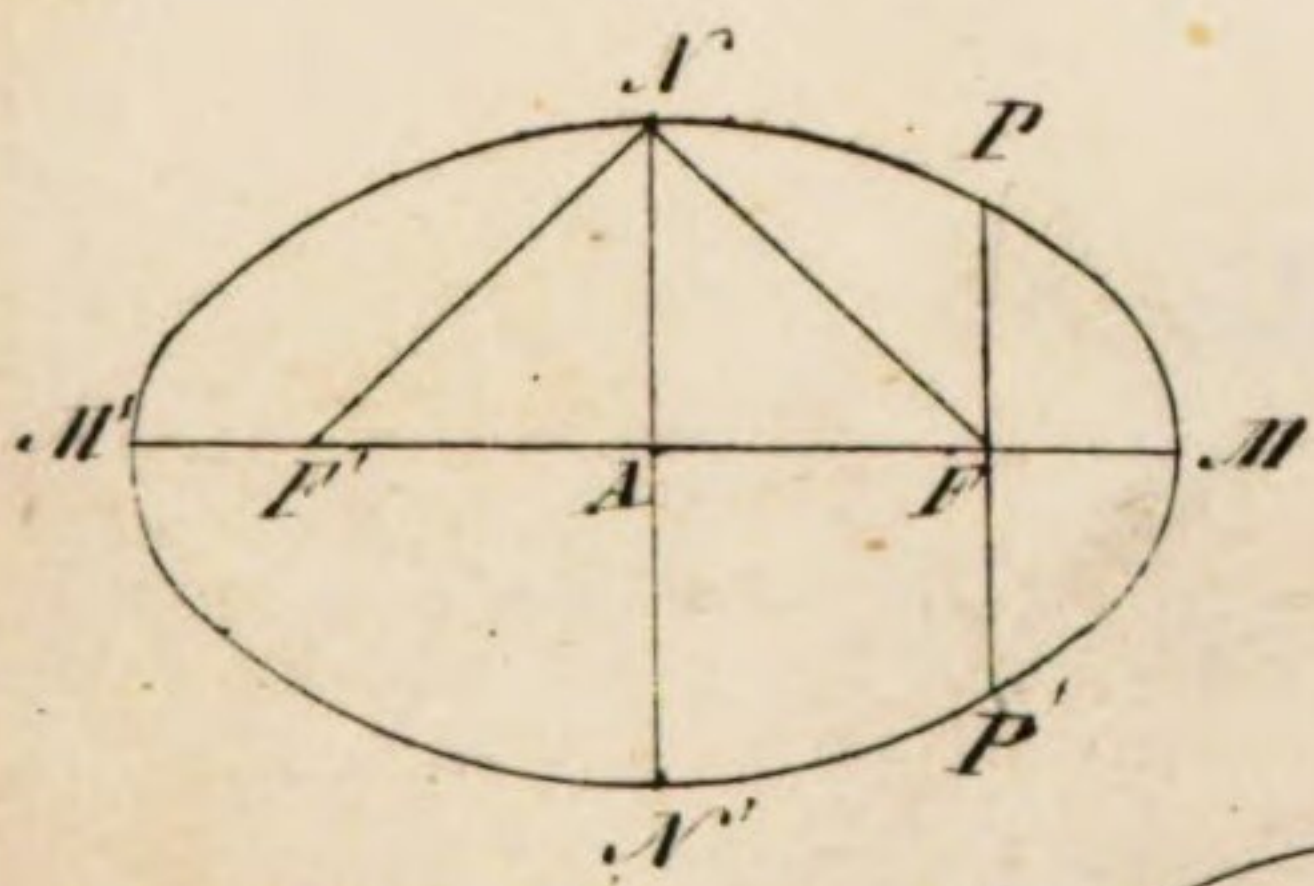


Fig. 14.

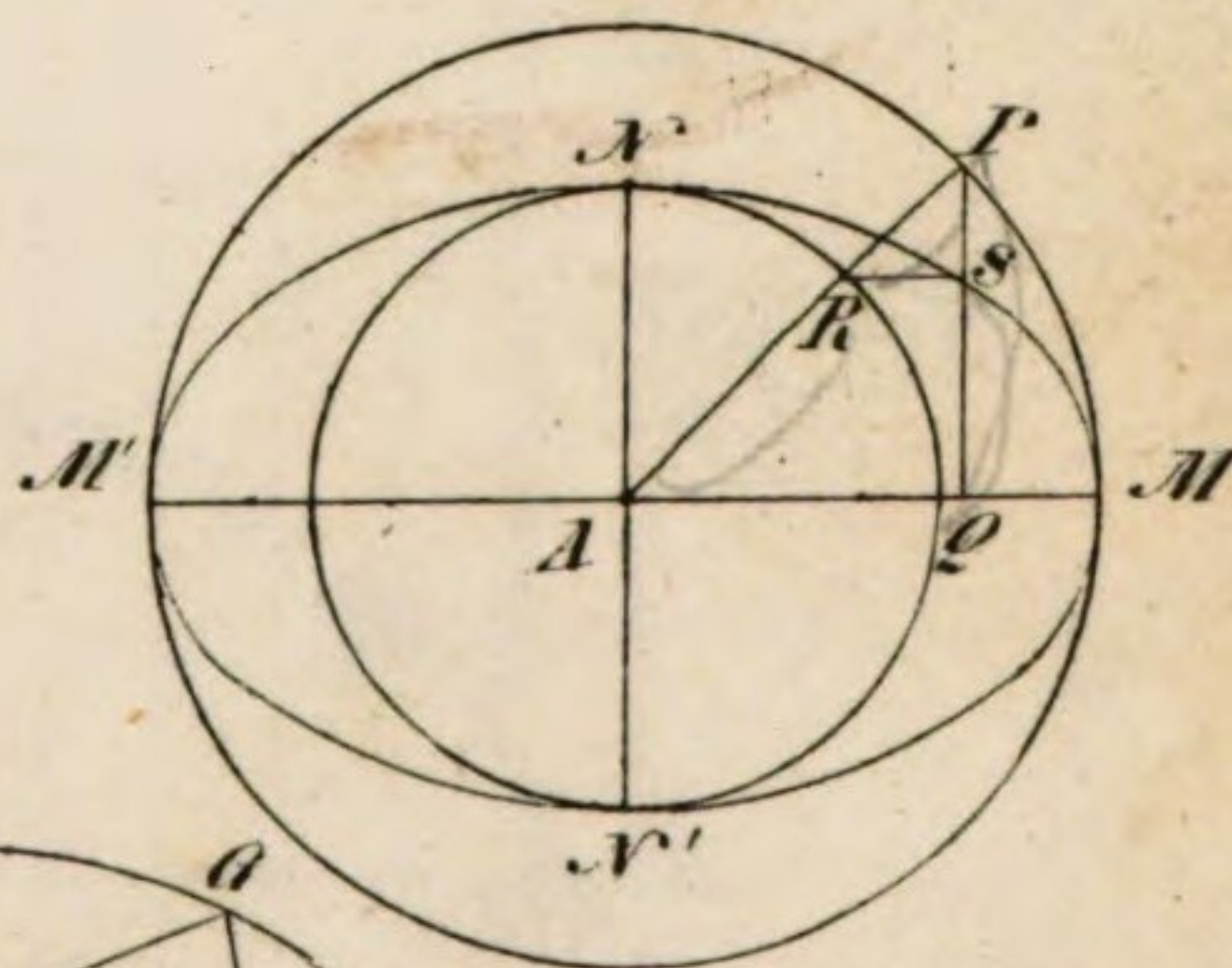
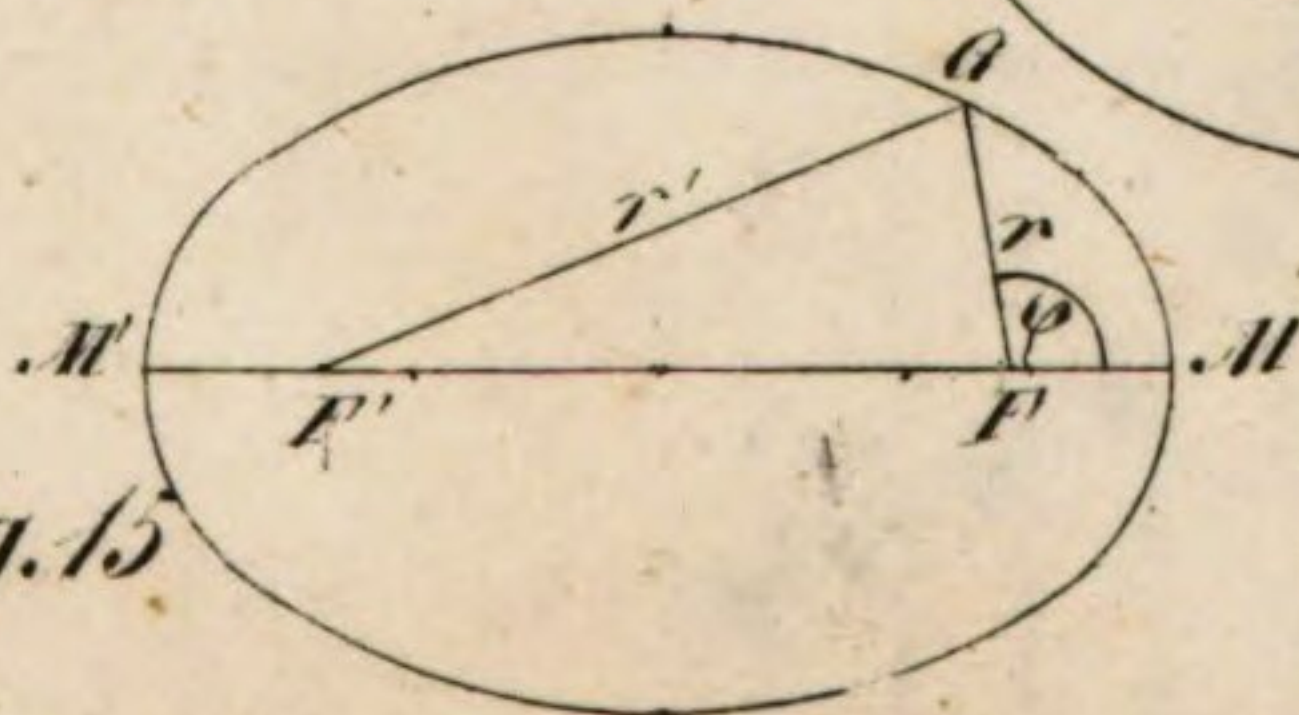
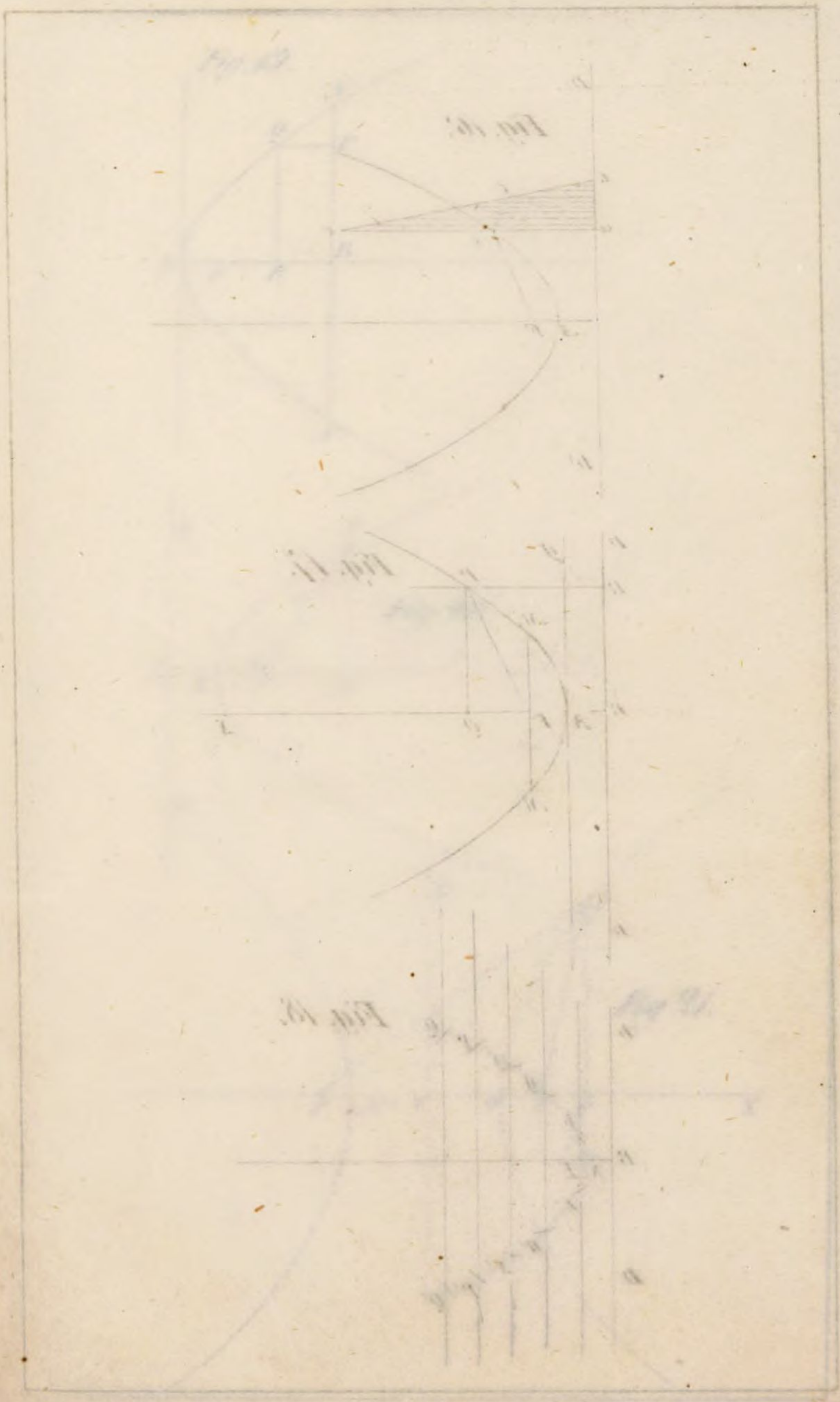


Fig. 15.



[Faint, illegible handwritten notes]



Tafel III.

Fig. 16.

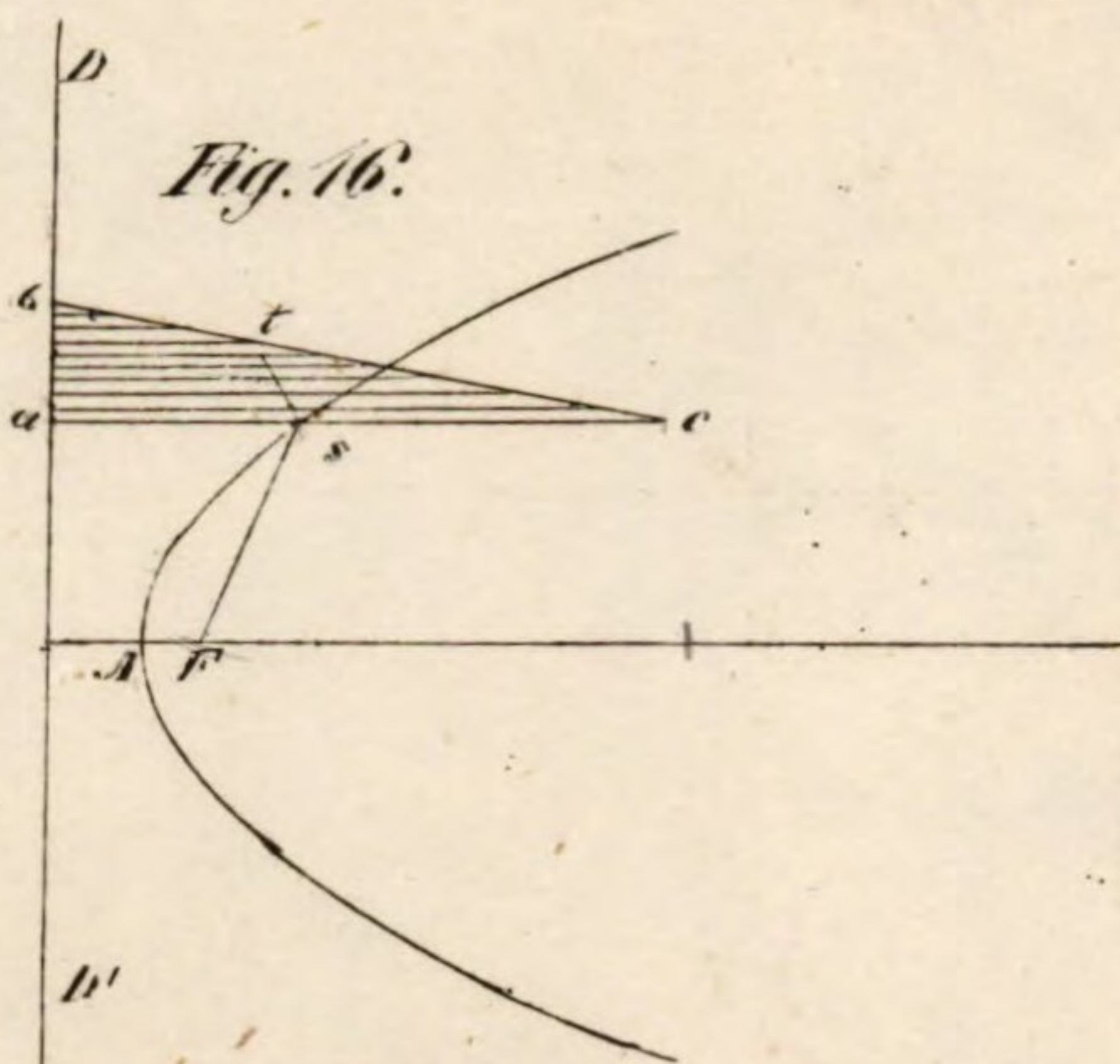


Fig. 17.

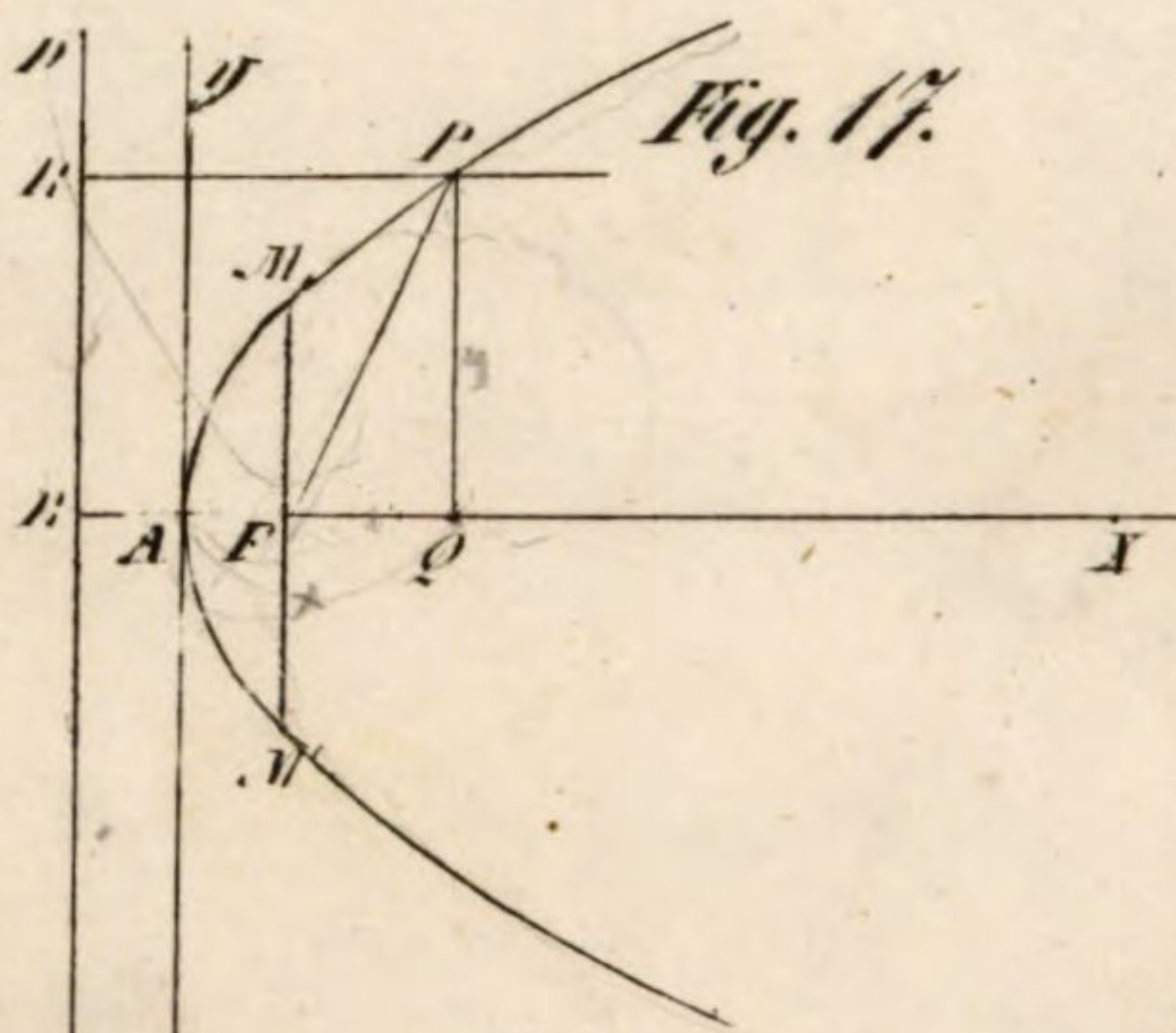
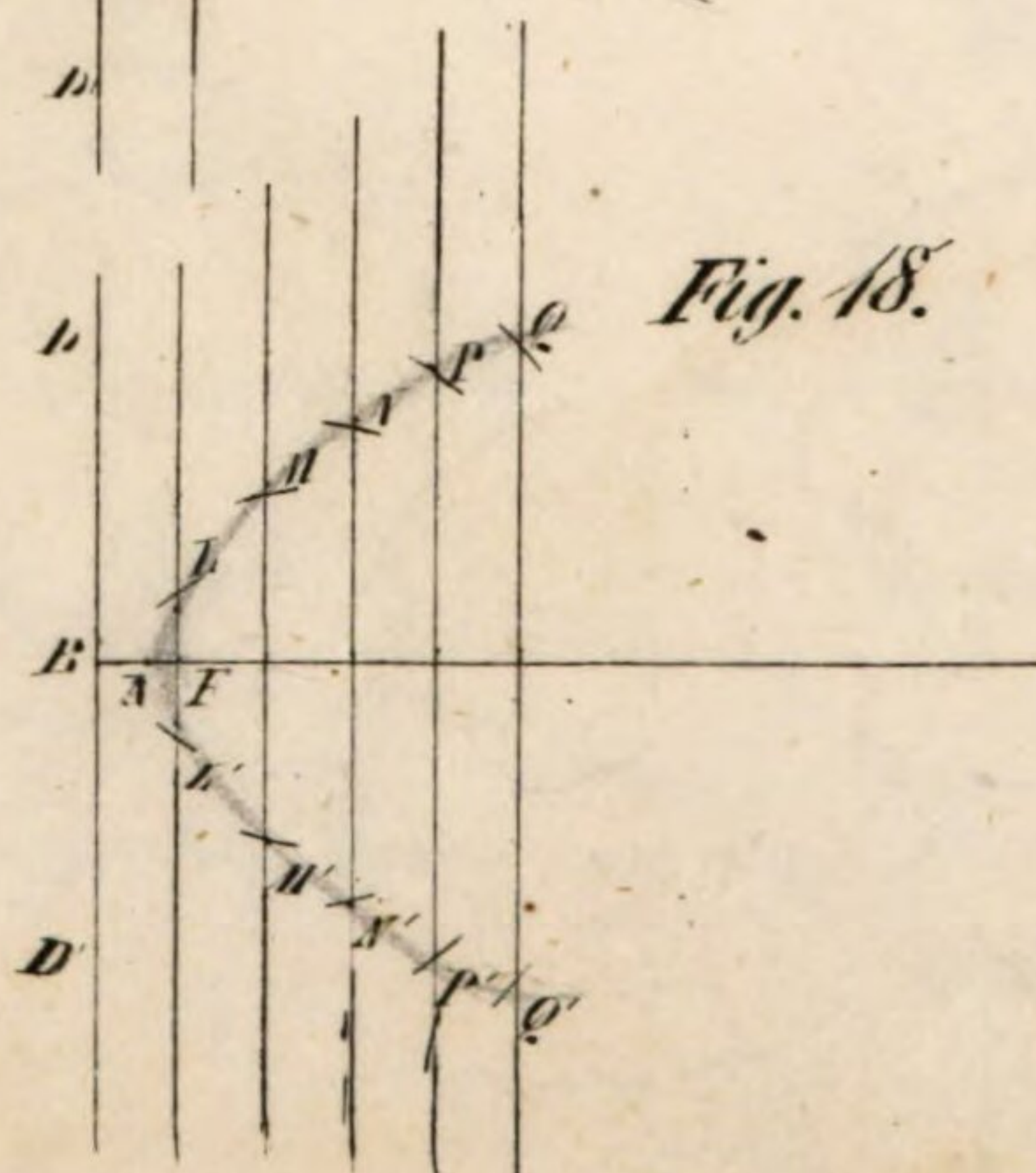
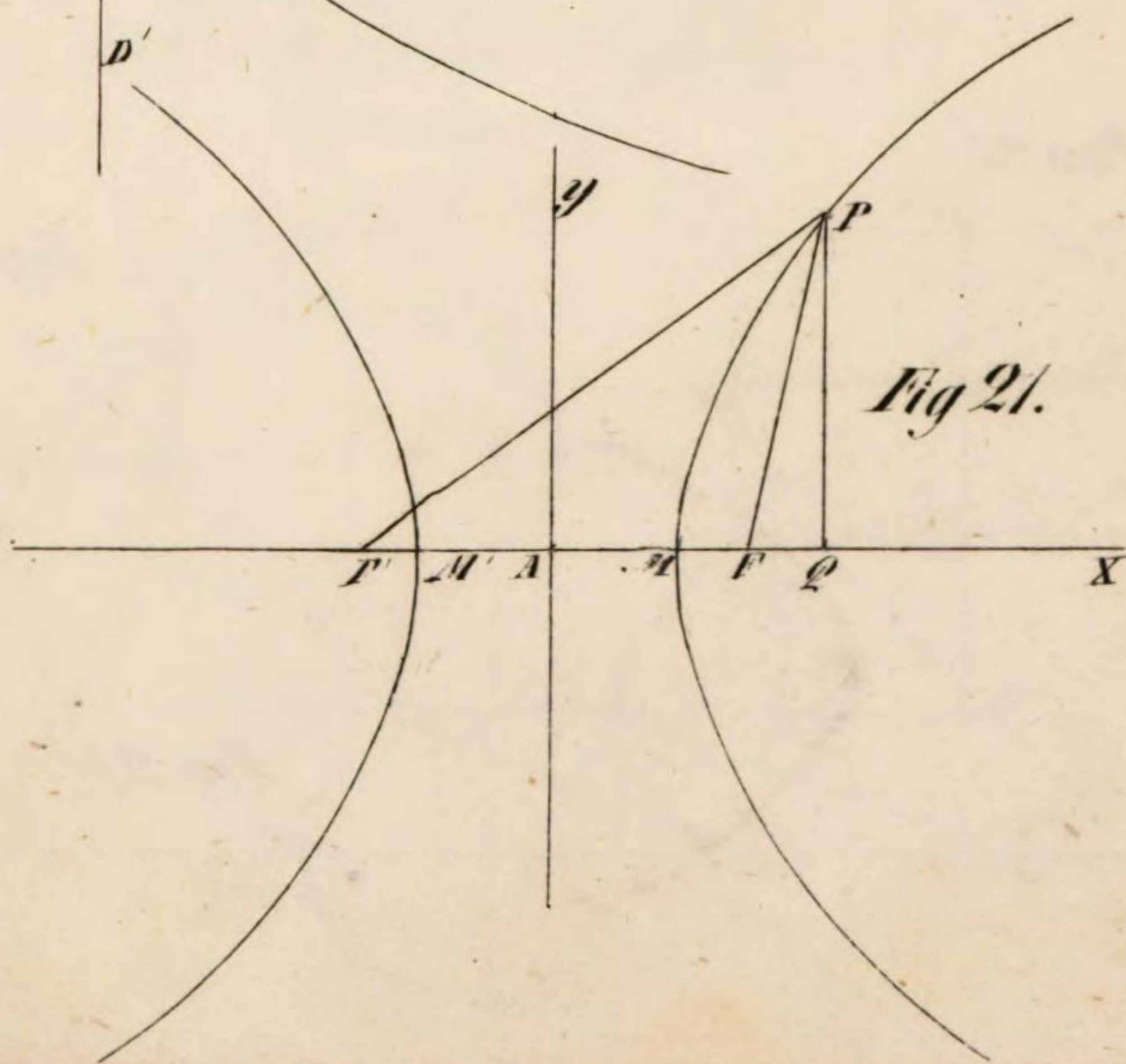
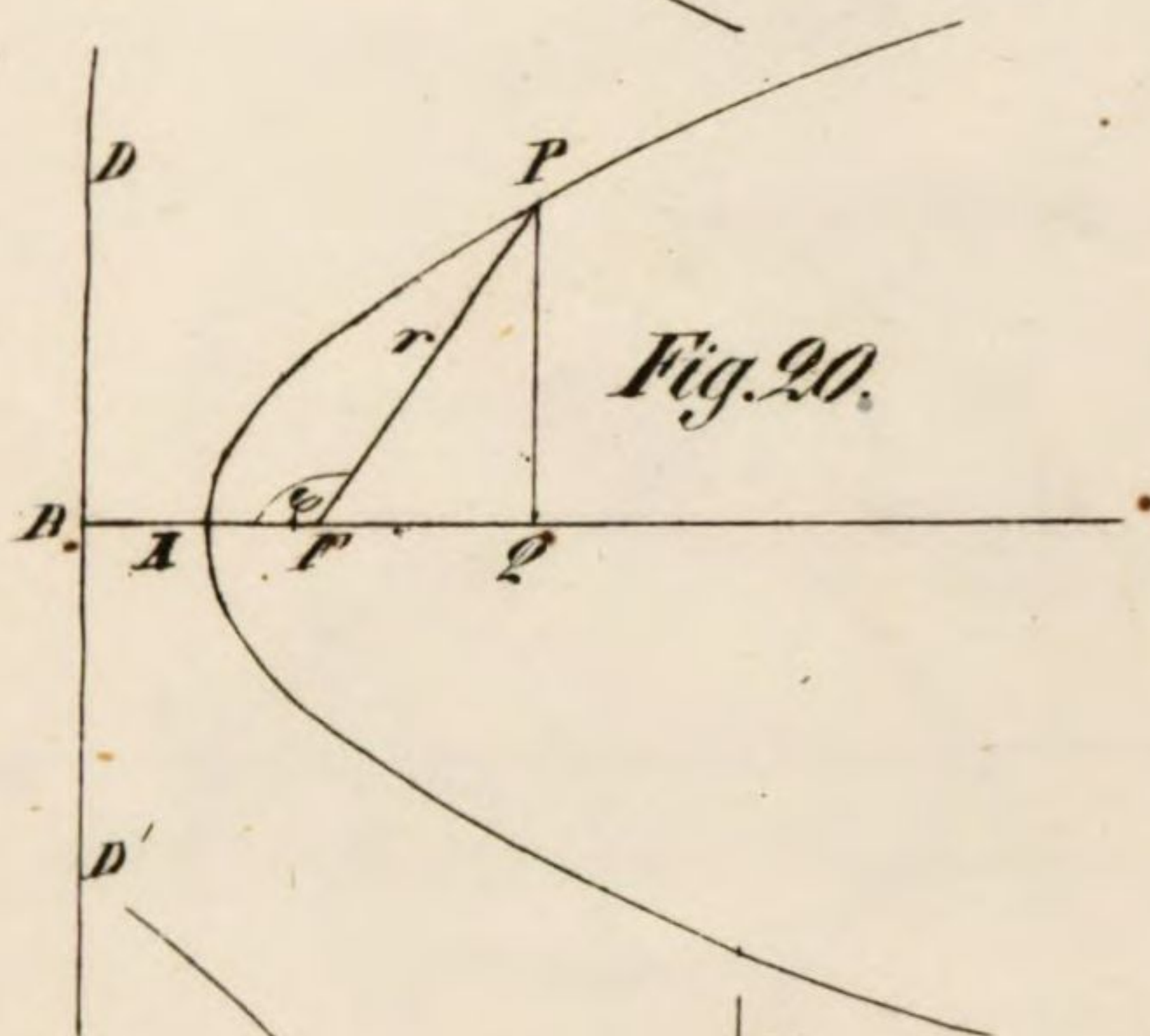
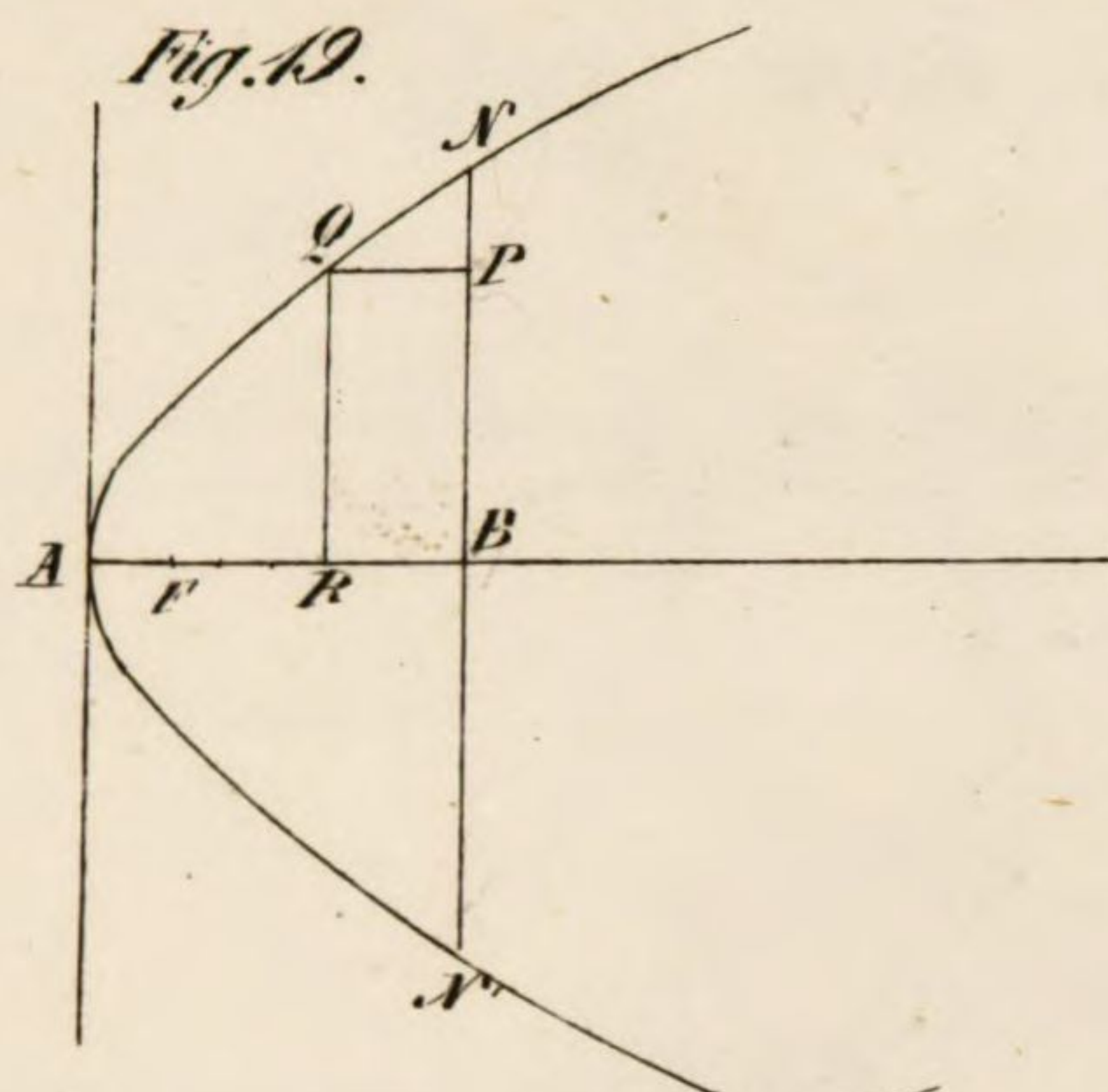
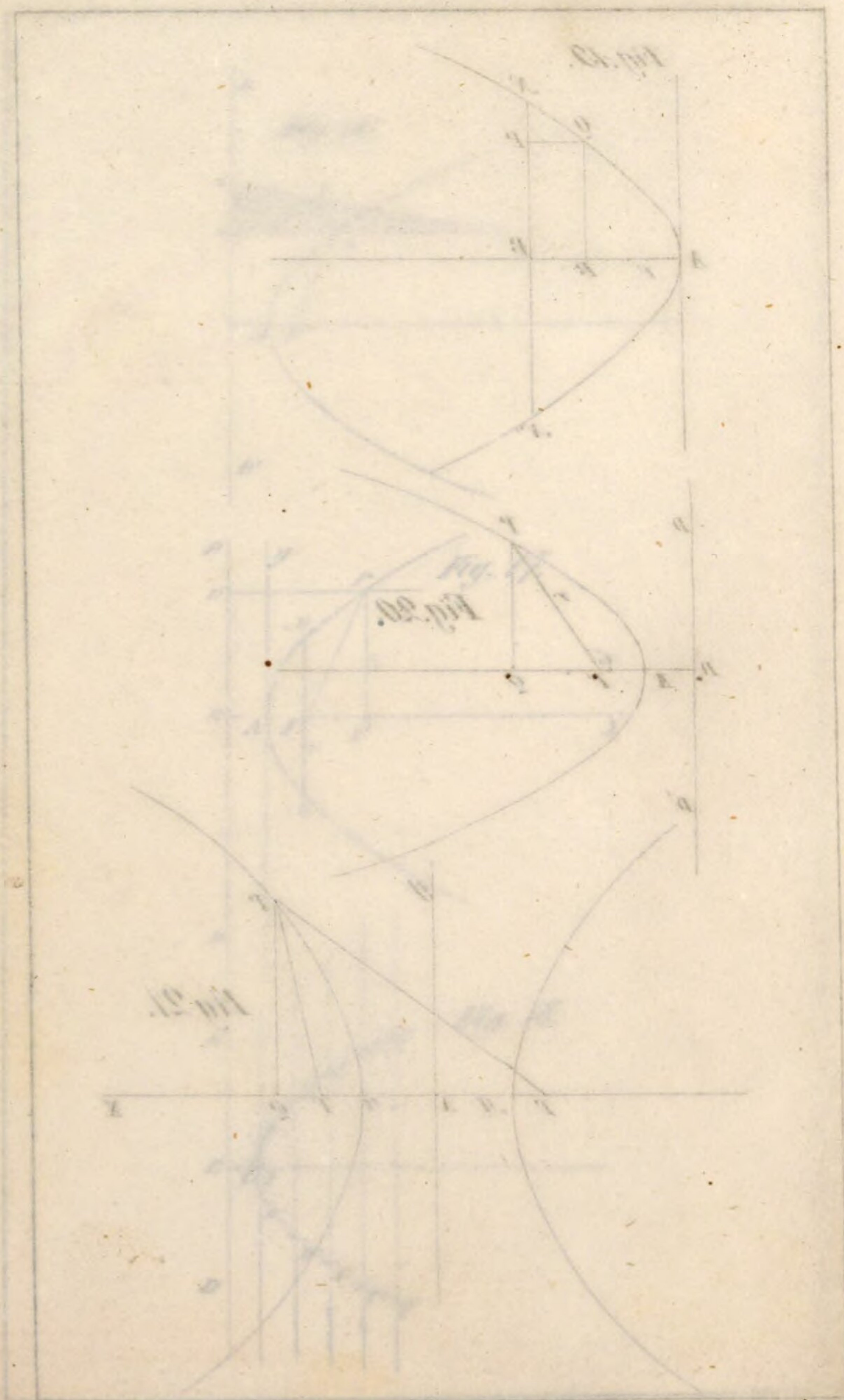


Fig. 18.

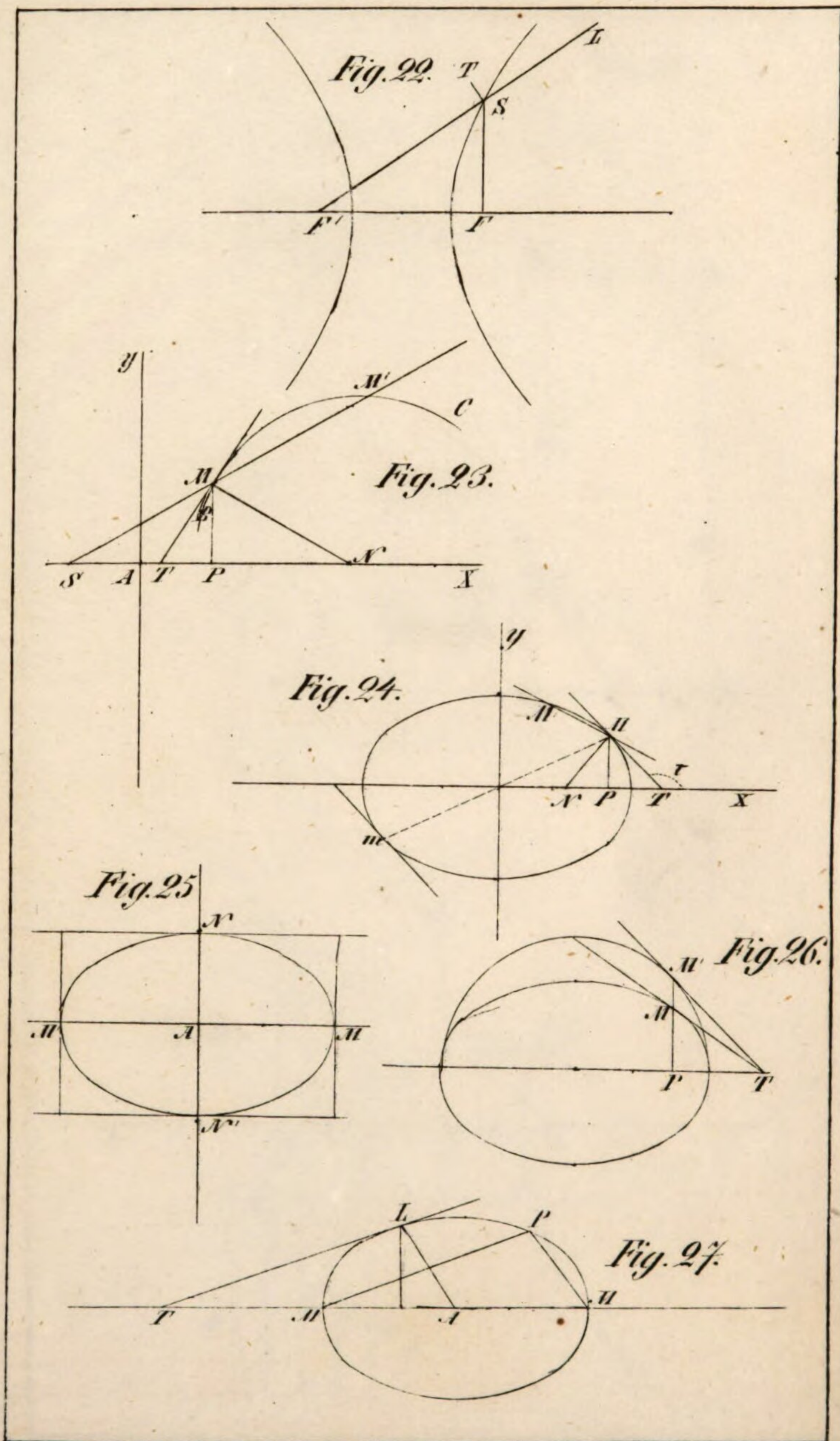


Tafel IV.





Tafel V.



Tafel VI.

Fig. 28.

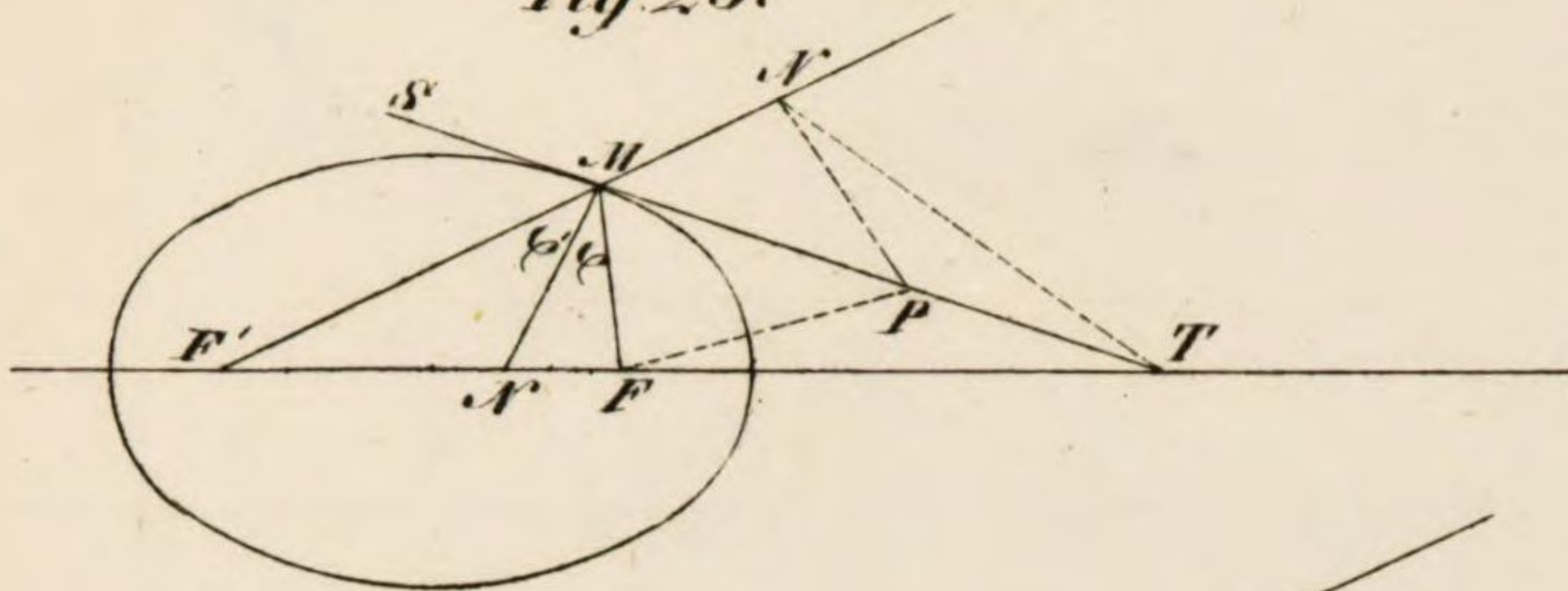


Fig. 29.

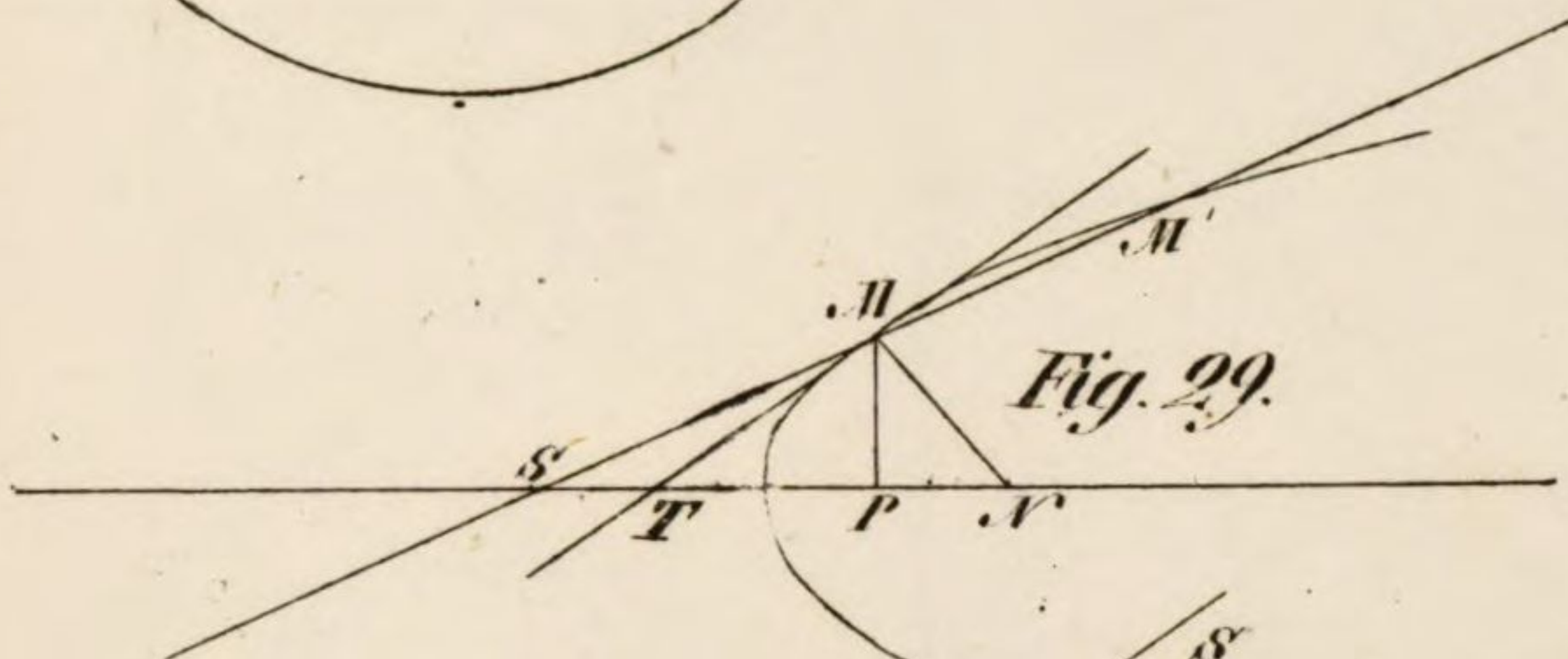


Fig. 30.

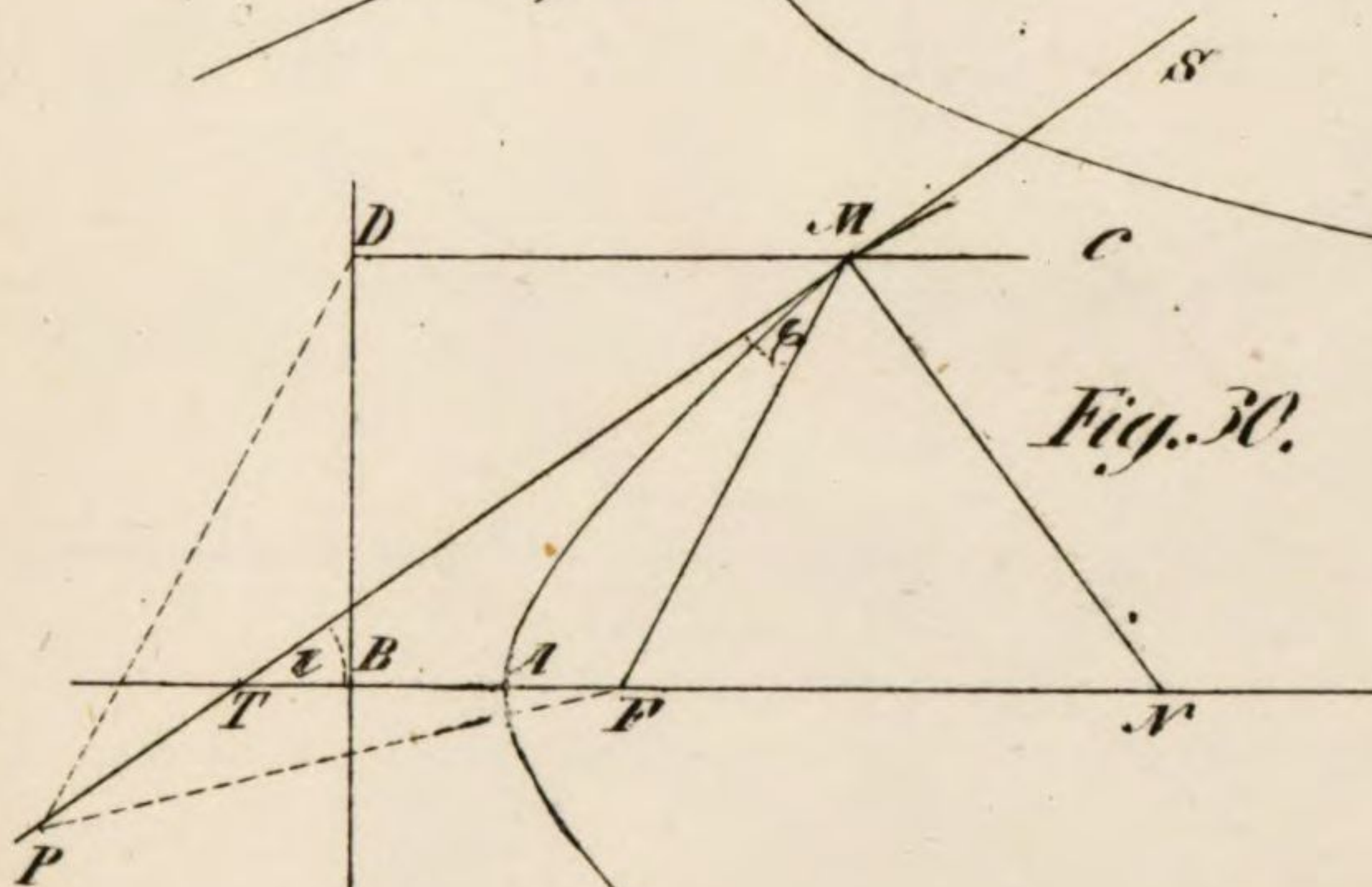
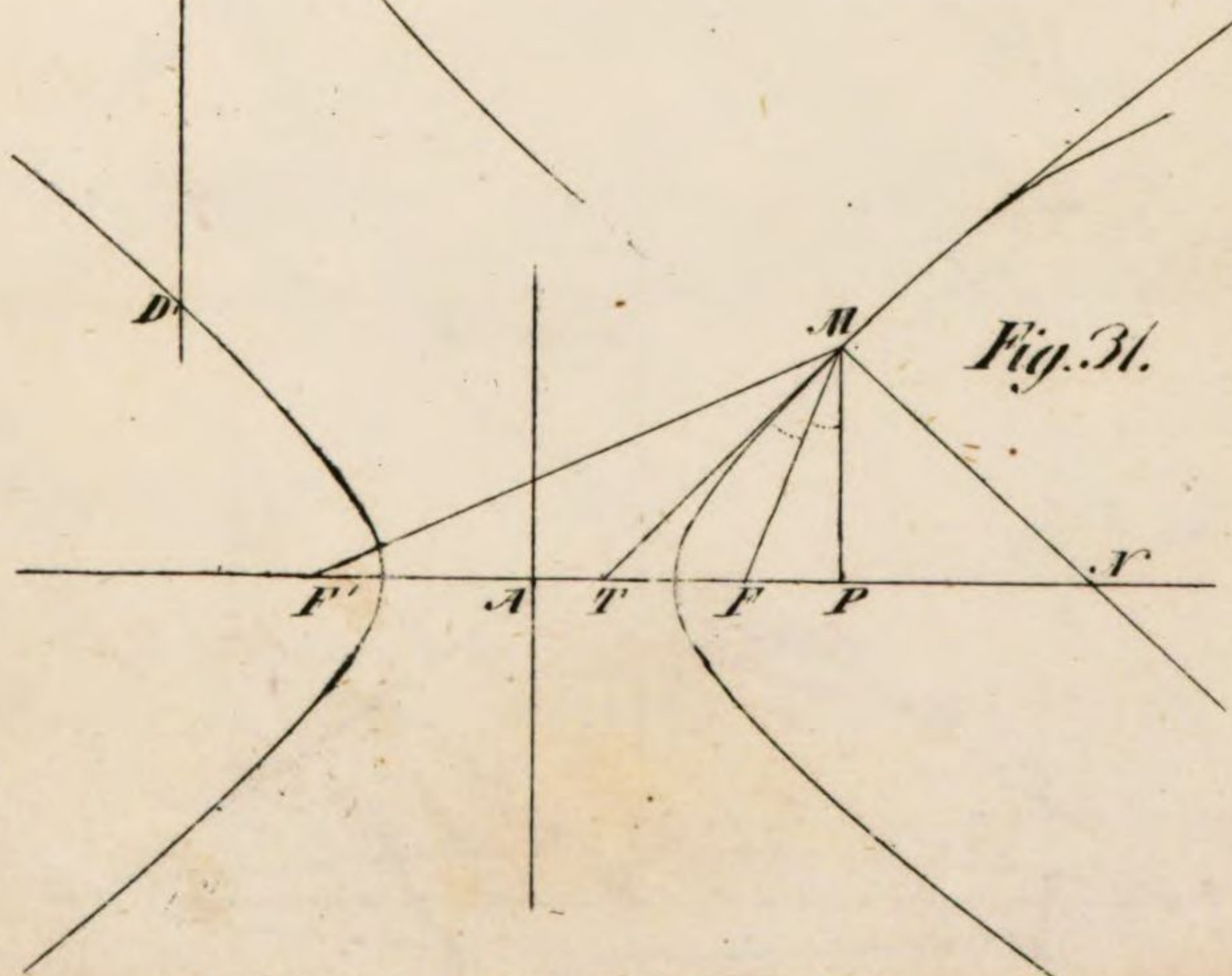
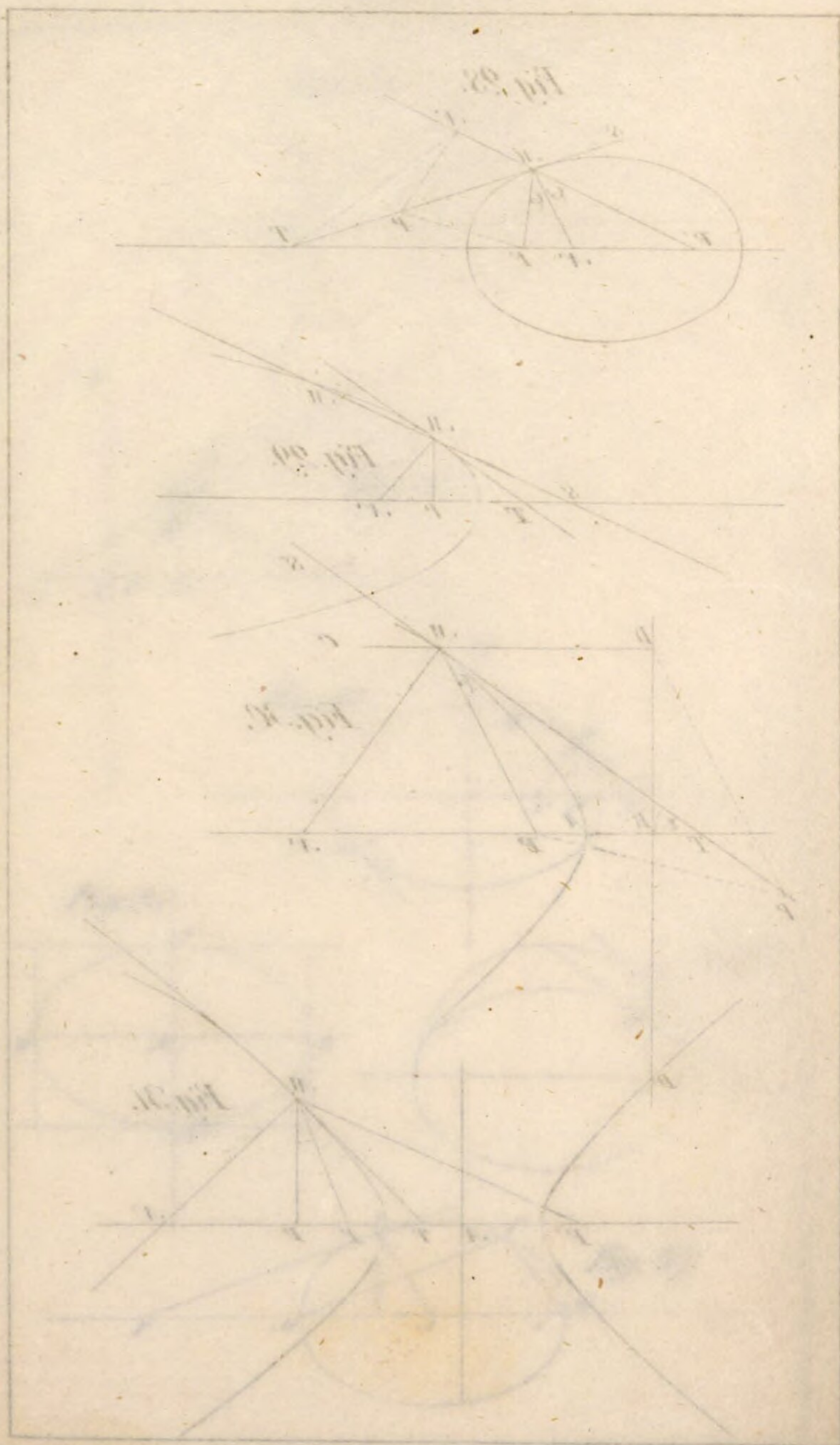
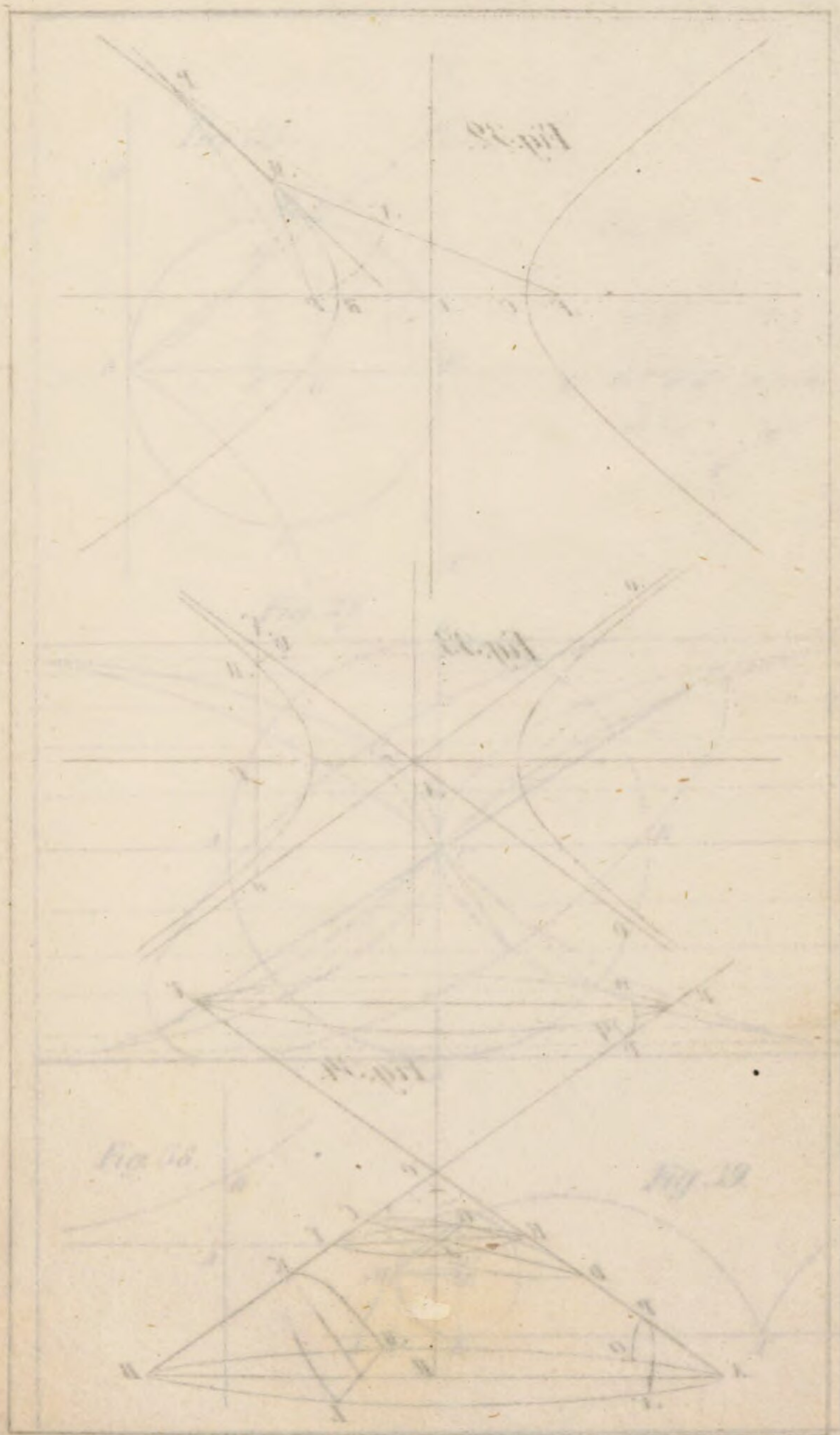


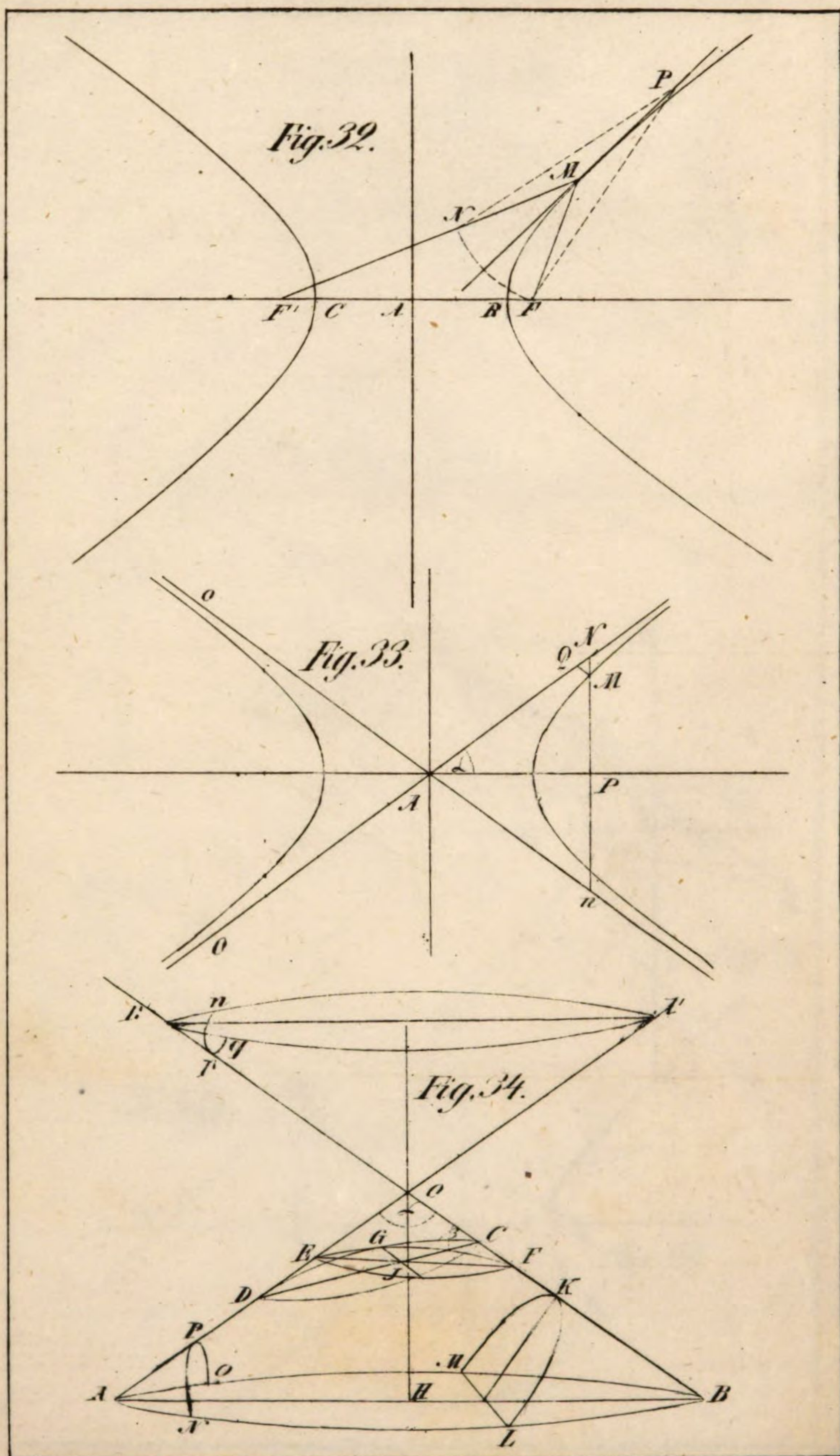
Fig. 31.







Tafel VII.



Tafel VIII.

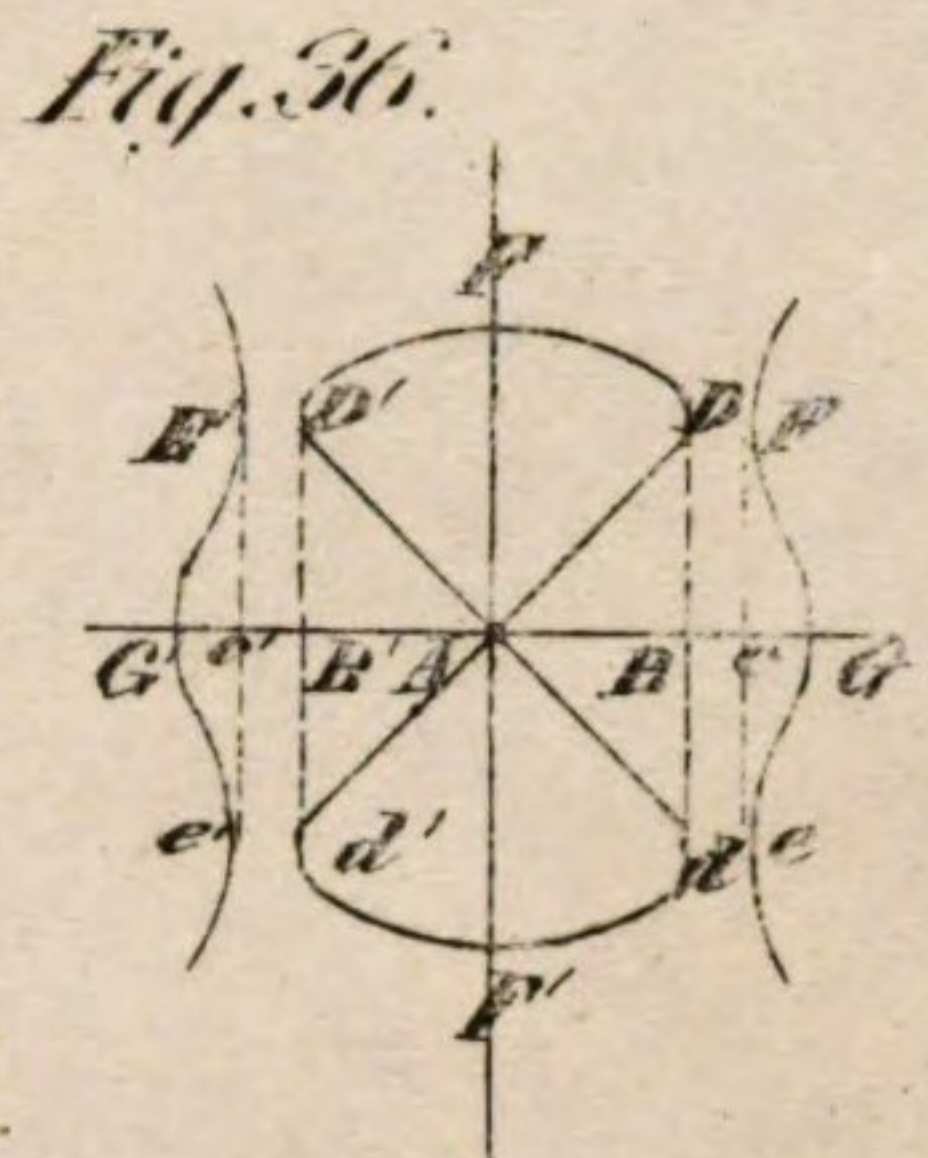
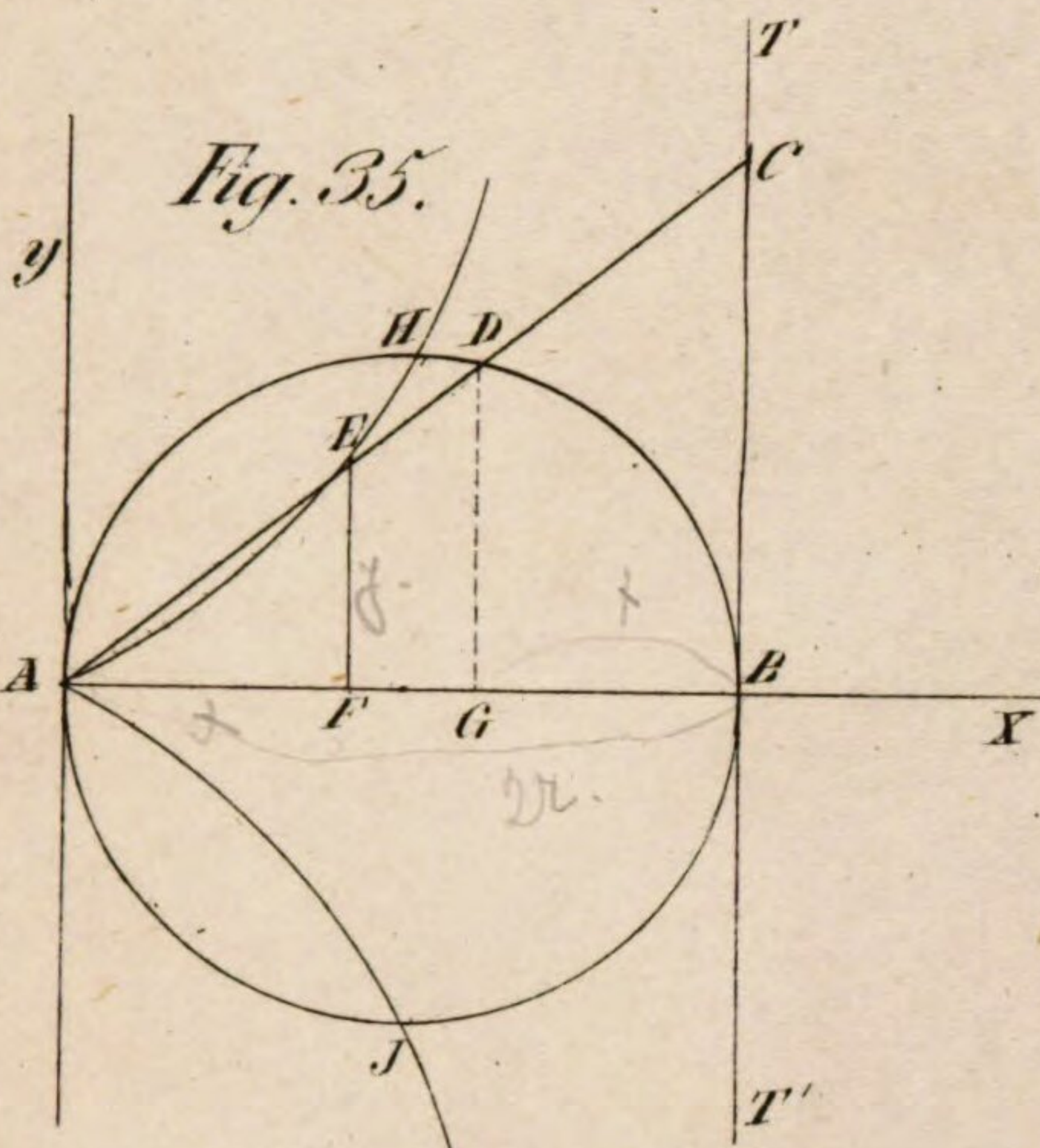


Fig. 37.

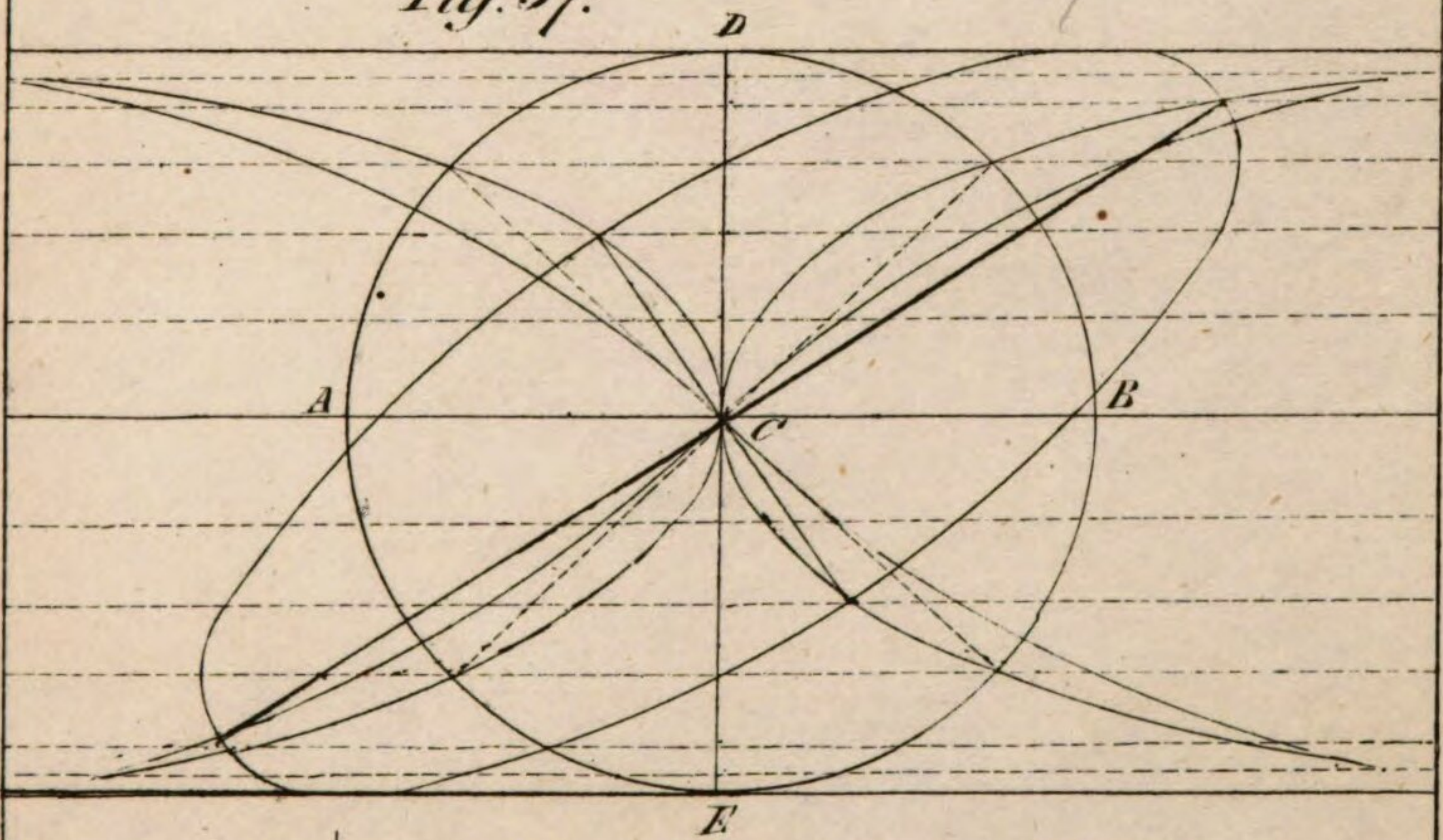


Fig. 38.

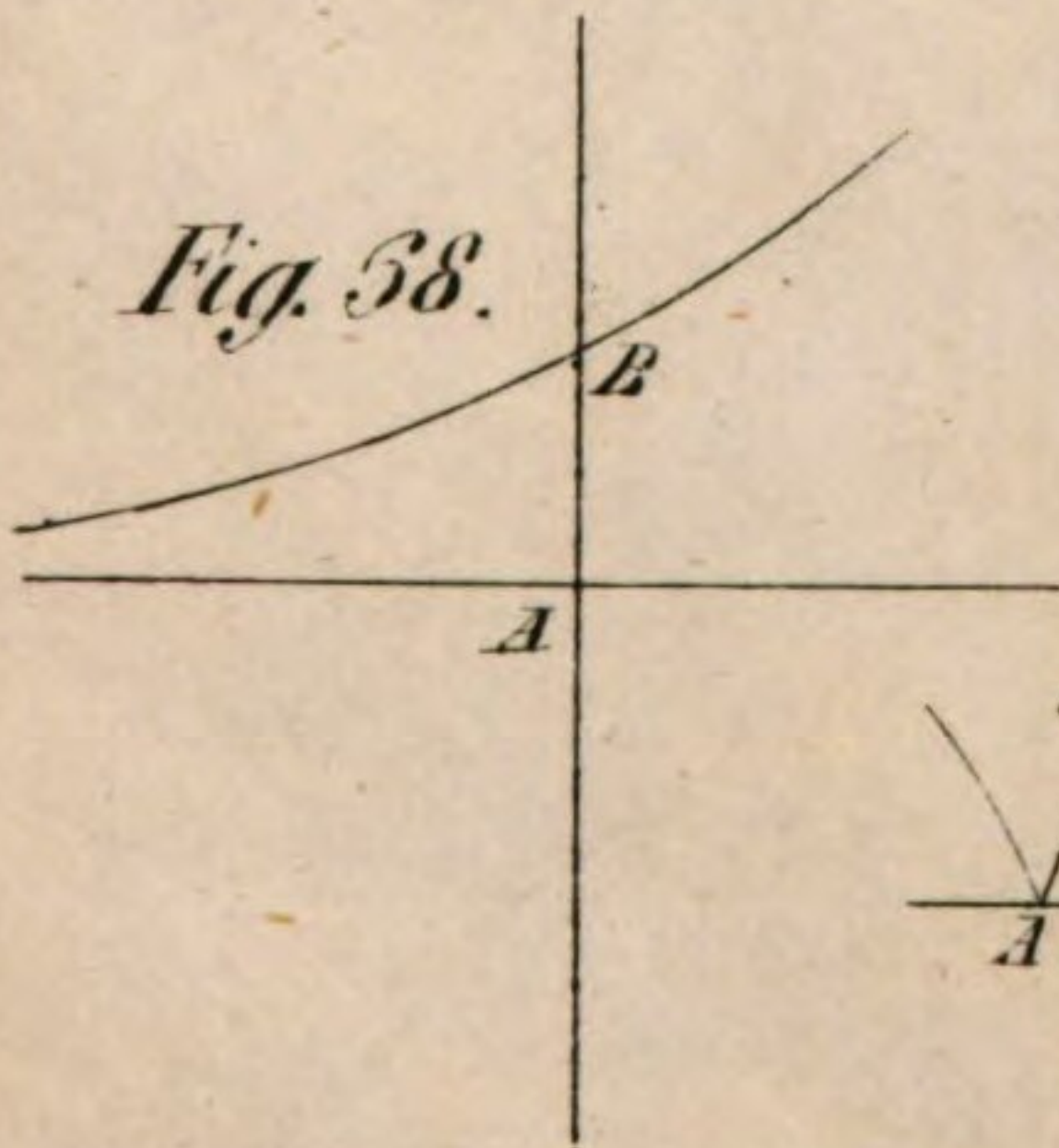
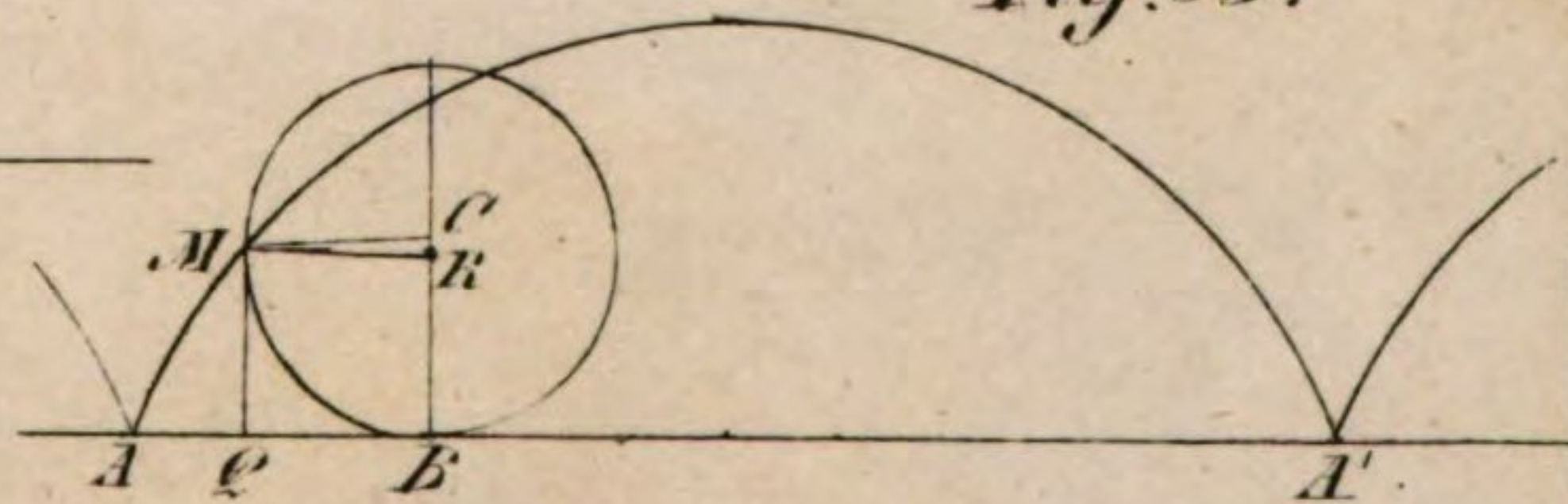
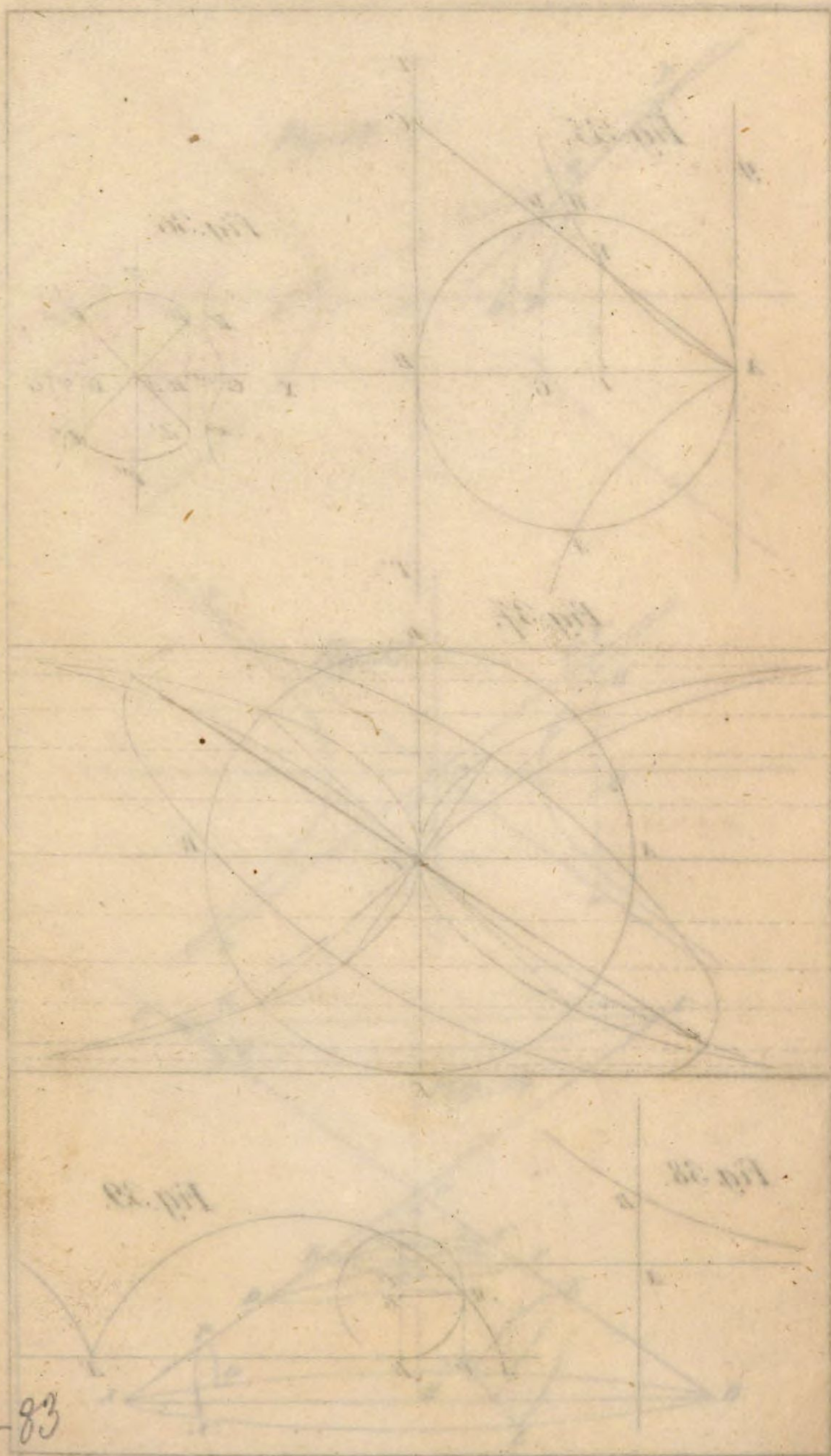


Fig. 39.





18 $\frac{X1}{24}$ 83

Wiegand, August

Die Elemente der analytischen Geometrie e. Lehrbuch für d. oberen Klassen
höherer Lehranst

Halle 1854

Math.p. 637 hf

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10083093-2